АТТРАКТОРЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Содержание

Введение

Актуальность темы и предмет исследования. Идеи и методы нелинейной динамики играют весьма важную роль в современной теории информации. Действительно, решение многих ключевых проблем этой теории (таких как различение детерминированных и стохастических сигналов, обнаружение и обработка слабых и зашумленных сигналов, исследование нейронных сетей и т. д.) не представляется возможным без понимания природы динамических процессов, происходящих в нелинейных системах. Одним из наиболее важных универсальных свойств таких систем является возможность возникновения (даже в относительно простых системах, таких как, например, система Лоренца, порождаемая системой из трех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями) чрезвычайно сложной хаотической динамики, обладающей ярко выраженными стохастическими свойствами (так называемого детерминированного хаоса).

В свою очередь, при исследовании динамических систем с нерегулярным хаотическим поведением траекторий активно используются идеи и методы близкие к теории информации. Так, для количественного и качественного описания сложности хаотической динамики используется понятие колмогоровской эпсилон-энтропии (и различные ее модификации, такие как топологическая и метрическая энтропия и др.), играющее фундаментальную роль в современной теории информации и являющееся обобщением энтропии К. Шеннона. Более того, существует даже, так называемая информационная теория динамического хаоса, в которой фактическая непредсказуемость поведения траекторий хаотической системы на больших временах объясняется производством системой новой информации с течением времени. Топологическая энтропия рассматриваемой системы определяет, согласно этой теории, количество новой информации, производимой системой в единицу времени. Кроме того, в качестве модельной динамической системы, демонстрирующей хаотическое поведение, обычно используются схемы Бернулли, например, с двумя различными символами. В этом контексте хаотические траектории естественно кодируются бесконечными последовательностями из нулей и единиц.

К настоящему времени достигнуто весьма глубокое понимание конечномерной динамики, порождаемой системами обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, предложен ряд количественных и качественных характеристик для описания этой динамики (показатели Ляпунова, инвариантные меры, топологическая и метрическая энтропия, хаусдорфова и фрактальная размерность инвариантных множеств и др.) и исследованы взаимосвязи между ними; изучено большое количество модельных примеров, иллюстрирующих природу хаотического поведения детерминированных систем и проясняющих причину и механизмы его возникновения; построена теория возмущений для различных структур в фазовом пространстве, таких как инвариантные торы, гиперболические множества, гомоклинические структуры и т.д. Кроме того, на основе этих понятий и результатов разработаны весьма эффективные алгоритмы для численного анализа реальных динамических систем, возникающих в приложениях. См., например, [1-2], [17], [25], [27], [63], [73].

Заметим, однако, что очень многие важные динамические системы, возникающие в современном естествознании, порождаются уравнениями в частных производных и, следовательно, имеют бесконечномерное фазовое пространство (например, $L^2(\Omega)$). Поэтому для систематического их изучения необходимо развитие теории бесконечномерных динамических систем. Одним из наиболее важных шагов в этом направлении стало нахождение при помощи метода обратной задачи рассеяния явных аналитических формул солитонных решений для ряда *консервативных* уравнений математической физики, таких как уравнение Кортевега де Фриза, нелинейное уравнения Шредингера, уравнение синус-Гордон и др., и построение бесконечномерной теории интегрируемых гамильтоновых систем (см. [8], [29] и цитированную там литературу).

Другим важным классом бесконечномерных динамических систем, включающим систему уравнений Навье-Стокса, уравнение Гинзбурга-Ландау, диссипативное волновое уравнение, системы уравнений реакции-диффузии и многие другие уравнения математической физики, являются так называемые диссипативные системы. Центральную роль при исследовании таких систем играет понятие глобального аттрактора, который, по определению, является компактным инвариантным подмножеством фазового пространства, притягивающим при $t \to \infty$ образы всех ограниченных подмножеств фазового пространства (см. [3], [12], [47-48], [62], [64], [76]). Таким образом, с одной стороны, аттрактор (если он существует) содержит всю нетривиальную динамику исследуемой системы, а с другой стороны, обычно оказывается существенно меньше, чем исходное фазовое пространство.

Наиболее изучен случай диссипативных систем, порождаемых эволюционными уравнениями математической физики в ограниченных областях. В этом случае глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, как правило, имеет конечную хаусдорфову и фрактальную размерность. Более того, в ряде случаев удается показать, что аттрактор $\mathcal{A}$ может быть вложен в конечномерное инвариантное подмногообразие фазового пространства, притягивающее экспоненциально все траектории рассматриваемой динамической системы (см. [3], [57], [76] и цитируемую там литературу). Таким образом, несмотря на то, что исходное фазовое пространство является бесконечномерным, порождаемая ими динамика фактически оказывается конечномерной, что позволяет весьма успешно применять идеи и методы классической теории конечномерных динамических систем для (см., например, [27], [73]).

Ситуация существенно изменяется при рассмотрении диссипативных систем, порождаемых эволюционными уравнениями в неограниченных областях Ω (например, $\Omega = \mathbb{R}^n$), систематическое изучение которых началось с первой половины 90х годов XX века (см. [34], [42], [58-59], [67-70]). В этом случае хаусдорфова и фрактальная размерность аттрактора $\mathcal{A}$, как правило, оказывается бесконечной. Более того, как ляпуновская размерность, так и топологическая энтропия динамических систем рассматриваемого класса оказывается бесконечной (см. [9-11], [50-52], [55-56], [78-82]). Таким образом, как классические характеристики динамической сложности, так и классические модельные примеры динамических систем, используемые в конечномерной динамике, оказываются непригодными для адекватного описания бесконечномерной динамики, возникающей в диссипативных системах этого типа, и, следовательно, возникает проблема нахождения новых количественных характеристик и новых модельных примеров, адекватно описывающих динамику данного типа.

Одним из возможных подходов к решению этой проблемы является использование понятия колмогоровской ε-энтропии для исследования аттрактора $\mathcal{A}$ и индуцированной на нем динамики. Напомним, что по определению (см. [14]), колмогоровской ε-энтропией $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{M}, \varPhi)$ компактного множества $\mathcal{M}$ в пространстве $\varPhi$ называется логарифм от наименьшего числа ε-шаров в $\varPhi$, необходимых для покрытия множества $\mathcal{A}$. Таким образом, согласно критерию Хаусдорфа, величина $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, \varPhi)$ является конечной при любом $\varepsilon > 0$, если $\mathcal{A}$ – компакт, и следовательно, колмогоровская ε-энтропия аттрактора $\mathcal{A}$ (или/и ее асимптотика при $\varepsilon \to 0$) действительно может рассматриваться как некоторая его количественная характеристика.

Оценки ε-энтропии для бесконечномерных аттракторов неавтономных диссипативных систем, порождаемых *неавтономными* уравнениями математической физики в ограниченных областях, были получены в работе [32]. Заметим, что в этом случае бесконечномерность аттрактора имеет внешнюю природу, то есть возникает лишь при воздействии на систему неавтономных внешних сил, зависимость которых от времени описывается бесконечным числом параметров (например, почти-периодических по времени, см. [48]). Поэтому, в этом случае асимптотика ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ естественно описывается в терминах ε-энтропии временной оболочки внешних сил (см. [32], [48]).

Оценки ε-энтропии аттракторов автономных и неавтономных диссипативных систем, порождаемых уравнениями математической физики в *неограниченных* областях, были получены в работах автора [9-11], [78-80]. В отличие от предыдущего случая, в неограниченных областях бесконечномерность аттрактора имеет внутреннюю природу, то есть возникает и в автономных системах при отсутствии внешних сил. Более того, как оказалось, тип асимптотики ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ при $\varepsilon \to 0$ имеет универсальный характер, зависящий, конечно, от геометрии неограниченной области $\varOmega$, но одинаковый для весьма широкого класса диссипативных систем в неограниченных областях, включающего в себя различные типы уравнений реакции-диффузии, диссипативные волновые уравнения и др. (см. [9-10], [26], [56], [78-80]). Некоторые частные случаи этих универсальных оценок были независимо получены в работах [50] и [52].

Другой отличительной чертой динамики, возникающей в диссипативных системах, порождаемых уравнениями математической физики в больших и неограниченных областях Ω, является наличие не только сложной картины эволюции во времени, но и появление сложных хаотических пространственных структур, а также возникновение нетривиального взаимодействия между пространственными и временными модами рассматриваемой системы, что приводит к формированию так называемого пространственно-временного хаоса (см., например, [27], [73]).

Одной из возможных моделей для описания этого феномена (см. [46], [72]) является дискретная динамическая система на решетке $\mathbb{Z}^n$, состоящая из $\mathbb{Z}^n$ хаотических (во времени) осцилляторов, расположенных в узлах решетки и связанных достаточно слабым пространственным взаимодействием. Действительно, если при отсутствии пространственного взаимодействия каждый из рассматриваемых хаотических осцилляторов содержит гиперболическое множество Γ_0, то из структурной устойчивости гиперболических множеств следует, что при достаточно малой константе взаимодействия рассматриваемая система будет иметь бесконечномерное гиперболическое множество, гомеоморфное $(\Gamma_0)^{\mathbb{Z}^n}$, которое и описывает пространственно-временной хаос в рамках этой модели (см. также, [36], [38], [46] и цитированную там литературу по по поводу дальнейшего исследования решеточных моделей этого типа).

Пространственная динамика и пространственный хаос в диссипативных системах, порождаемых уравнениями математической физики, исследовался в работах [35], [37], [40-41], [43-44], [53], [64]. В частности, в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ был построен ряд примеров уравнений реакции диффузии с пространственно периодической функцией взаимодействия, аттрактор которых допускает вложение схемы Бернулли $\{0,1\}^{Z^n}$ с двумя различными символами $\omega \in \{0,1\}$. Более того, при этом вложении сдвиг Бернулли на $\{0,1\}^{Z^n}$ оказывается сопряженным с соответствующим пространственным сдвигом за период на аттракторе. Заметим, однако, что схема Бернулли с конечным числом символов имеет конечную топологическую энтропию, тогда как топологическая энтропия пространственных динамических систем, связанных с диссипативными уравнениями математической физики, обычно равна бесконечности (это следует из оценок снизу для колмогоровской энтропии аттрактора, полученных автором). Таким образом, классической схемы Бернулли с конечным числом символов недостаточно для объяснения природы пространственного хаоса и, следовательно, возникает проблема нахождения новых относительно простых модельных динамических систем, адекватно описывающих пространственный хаос в диссипативных системах в неограниченных областях.

Эта проблема была решена в работах автора [11] и [80-81]. в которых многомерная схема Бернулли с бесконечным (континуальным) числом символов была использована для объяснения природы пространственного и пространственно-временного хаоса в уравнениях реакции-диффузии в неограниченной области. Фундаментальную роль при этом играют классические объекты теории информации, такие как пространства функций $\mathbb{B}_\sigma$, преобразование Фурье которых имеет компактный носитель, и формула Котельникова.

Цель работы. Построение общей теории существенно-бесконечномерных динамических систем, описывающей пространственно-временную динамику, связанную с уравнениями реакции-диффузии в неограниченных областях. Исследование пространственной структуры глобальных аттракторов таких систем. Построение и изучение количественных и качественных характеристик, дающих оценки сверху и снизу для пространственной и динамической сложности этих аттракторов. Исследование феномена пространственного и пространственно-временного хаоса, возникающего в диссипативных уравнениях математической физики в неограниченных областях при помощи формулы Котельникова и схем Бернулли с бесконечным числом символов.

Методы исследования. В диссертации использовались классические методы теории нелинейных уравнений в частных производных, основанные на последовательном применении теории обобщенных функций, пространств Соболева и теорем вложения. Ключевую роль при этом играли весовые пространства Соболева в неограниченных областях и теоремы о регулярности решений параболических уравнений в таких пространствах. Кроме того, были разработаны новые методы исследования решений уравнений реакции-диффузии в весовых пространствах Соболева, позволившие доказать существование глобальных аттракторов для весьма общего класса уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях и получить весьма тонкие оценки для разности между решениями, лежащими на аттракторе, необходимые для оценки сверху его колмогоровской энтропии.

Для получения оценок снизу колмогоровской энтропии аттрактора и исследования природы пространственно-временного хаоса был предложен новый метод построения бесконечномерных существенно-неустойчивых многообразий, не требующий гиперболичности соответствующего положения равновесия. Кроме того, были использованы методы теории аналитических функций и теории аппроксимации, связанные с формулой Котельникова и ее обобщениями, а также некоторые методы теории многопараметрических полугрупп.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Доказано существование глобальных аттракторов для весьма широкого класса систем уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях. Получены оценки сверху и снизу колмогоровской эпсилон-энтропии аттракторов в зависимости от эпсилон и конкретного вида неограниченной области.

Введен ряд новых характеристик сложности пространственно-временной динамики, обобщающих фрактальную размерность и топологическую энтропию, доказана их конечность в случае системы уравнений реакции диффузии общего вида и приведены конкретные примеры таких уравнений, для которых введенные характеристики оказываются строго положительными.

Развита теория бесконечномерных существенно-неустойчивых многообразий уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях, позволяющая описывать пространственно-временную динамику при помощи гомеоморфных вложений многомерных схем Бернулли с бесконечным числом символов.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные в ней методы исследования и полученные результаты носят универсальный характер и могут быть применены для изучения природы пространственно-временного хаоса, возникающего во многих конкретных уравнениях математической физики. Работа может быть полезна специалистам по нелинейной динамике, уравнениям в частных производных, гидродинамике и теории информации.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции по дифференциальным уравнениям EQUADIFF 99 (Берлин, 1999), на международной конференции по нелинейной динамике, посвященной столетию А.А. Андронова (Нижний Новгород, 2001), на международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" посвященной столетию И.Г.Петровского (Москва, МГУ, 2001) и других конференциях, на семинарах в Институте проблем передачи информации РАН, в Московском государственном университете, зарубежных университетах (Берлин, Штуттгарт (Германия), Париж, Пуатье (Франция)).

Личный вклад. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 21 научная работа объемом от 1 до 68 страниц. Одиннадцать из них опубликовано в ведущих российских рецензируемых журналах (Успехи Мат. Наук, Математический Сборник, Труды ММО, Мат. Заметки) и 10 – в зарубежных журналах (Communications on Pure and Applied Mathematics, Mathematische Nachrichten, Jornal of Dynamics and Differential Equations и др.).

Содержание работы. В диссертации изучается пространственно-временная динамика, порождаемая следующей модельной системой уравнений типа реакции-диффузии в неограниченной области Ω (граница которой удовлетворяет некоторым условиям регулярности, точная формулировка которых приведена в §1):

$$\begin{cases} \partial_t u = a\Delta_x u - (L, \nabla_x)u - \lambda_0 u - f(u) + g, \quad x \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь $u = (u^1, \cdots, u^k)$ – неизвестная векторная функция, f и g – заданные функции, $\lambda_0 > 0$ – заданная положительная константа,

$$(L, \nabla_x)u := \sum_{i=1}^{n} L_i \partial_{x_i} u, \tag{0.2}$$

где $L = L(x) \in C_b^1(\Omega)$ – заданное векторное поле, удовлетворяющее условию

$$\|\operatorname{div} L\|_{L^\infty(\Omega)} \le \lambda_0/2. \tag{0.3}$$

Напомним, что в приложениях векторное поле $\vec{L}$ обычно является решением системы Навье-Стокса, поэтому условие (0.3) не является ограничительным.

Предполагается также, что матрица диффузии $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ имеет положительную симметрическую часть:

$$a + a^* > 0. \tag{0.4}$$

Уравнения вида (0.1) при различных ограничениях на геометрию области Ω, структуру нелинейной функции взаимодействия f, и внешнюю силу g изучались многими авторами (см., например, [3], [16], [18-22], [65], [76] и цитированную там литературу).

В настоящей работе предполагается, что нелинейная функция $f \in C^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ удовлетворяет условиям диссипативности:

$$\begin{cases} 1. \;\; f(u).u \geq -C, \\ 2. \;\; f'(u) \geq -K, \end{cases} \tag{0.5}$$

где через $u.v$ обозначено стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$.

Кроме того, предполагаются выполненными следующие ограничения на рост f при $|u| \to \infty$:

$$\begin{cases} 1. \;\; |f(u)| \leq C(1 + |u|^p), \\ 2. \;\; |f'(u)|^{p/(p-1)} \leq C(|f(u)| + |u| + 1), \end{cases} \tag{0.6}$$

где показатель роста $p \geq 1$ удовлетворяет условию дополнительному условию $p < p_{max} := 1 + \frac{4}{n-4}$ если $n > 4$.

В отличие от случая ограниченной области Ω, в неограниченной области пространство $L^2(\Omega)$ (равно как и пространства $W^{l,p}(\Omega)$) не является адекватным фазовым пространством для задачи (0.1). Действительно, в случае неограниченной области Ω (например, $\Omega = \mathbb{R}^n$) из условия $u_0 \in L^2(\Omega)$ следует, что (в некотором смысле) $u_0(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Таким образом, при таком выборе фазового пространства многие важные и реально встречающиеся в приложениях структуры (такие как бегущие волны, пространственно периодические решения и др.) автоматически исключаются из рассмотрения. Более того (как следствие вышеизложенного), существование глобального аттрактора в $L^2(\Omega)$ для системы (0.1) накладывает весьма жесткие ограничения на структуру нелинейной функции f и внешней силы g, которые не выполняются даже в простейших примерах уравнений вида (0.1) (например, для скалярного уравнения Chafee-Infante см. [11], [82]). Поэтому, следуя [58], [70], мы будем рассматривать задачу (0.1) в фазовом пространстве

$$u_0 \in \Phi_b(\Omega) := W_b^{2,q}(\Omega) \cap \{u_0\big|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{0.7}$$

где $q > n+1$ – некоторый фиксированный показатель, а символ $W_b^{l,q}$ обозначает следующее пространство:

$$W_b^{l,q}(\Omega) := \{u_0 \in D'(\Omega)\ :\ \|u_0\|_{W_b^{l,q}} := \sup_{x_0 \in \Omega} \|u_0\|_{W^{l,q}(\Omega \cap B^1_{x_0})} < \infty\}. \tag{0.8}$$

Здесь и далее $B^R_{x_0}$ – шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x_0, а $W^{l,q}(V)$ – классическое соболевское пространство обобщенных функций, производные которых до порядка l включительно принадлежат пространству $L^q(V)$. Грубо говоря, фазовое пространство Φ_b состоит из достаточно регулярных функций u_0, ограниченных при $|x| \to \infty$. При этом никаких условий стремления к нулю при $|x| \to \infty$ не накладывается.

Относительно внешней силы $g = g(x)$ естественно предположить, что

$$g \in L^q_b(\Omega) := W_b^{0,q}(\Omega). \tag{0.9}$$

Первая глава настоящей работы посвящена исследованию аналитических свойств системы (0.1) и ее решений на конечном интервале времени $t \in [0, T]$. Основным результатом этой главы можно считать следующую теорему.

Теорема 0.1. *Пусть выполнены условия* (0.2)–(0.9). *Тогда для любого* $u_0 \in \Phi_b$ *задача* (0.1) *имеет единственное решение* $u(t) \in \Phi_b$, $t \geq 0$, *и выполнена следующая оценка:*

$$\|u(t)\|_{\Phi_b(\Omega)} \leq Q\left(\|u(0)\|_{\Phi_b(\Omega)}\right) e^{-\alpha t} + Q\left(\|g\|_{L^q_b(\Omega)}\right), \tag{0.10}$$

где $\alpha > 0$ *– некоторая положительная константа, а* Q *– некоторая монотонная функция, зависящая от* f*, но не зависящая от* u.

Таким образом, задача (0.1) *определяет полугруппу* S_t, *действующую в фазовом пространстве* $\Phi_b(\Omega)$, *по стандартной формуле*

$$S_t : \Phi_b(\Omega) \to \Phi_b(\Omega), \quad t \geq 0, \quad S_t u_0 := u(t), \tag{0.11}$$

где $u(t)$ *– решение* (0.1) *с начальным условием* $u(0) = u_0$.

Отметим, что в случае скалярной матрицы диффузии, благодаря стандартной технике, основанной на принципе максимума (см., например, [82]), результат теоремы 0.1 может быть доказан и при отсутствии ограничений на рост (0.6) (см., также [55]). В общем случае нескалярной матрицы диффузии a оценки вида (0.10) обычно доказывались при существенно более сильных ограничениях на рост нелинейности f, а именно $p \leq 1 + \frac{4}{n-2}$ в случае ограниченной области Ω и $p < 1 + \min\{\frac{4}{n}, \frac{2}{n-2}\}$ в случае неограниченной области Ω (см. [42]). Результат теоремы 0.1 является обобщением работы автора [77], в которой оценка вида (0.10) (при ограничении на рост $p < 1 + \frac{4}{n-4}$) была получена для случая ограниченной области Ω. В частности, в наиболее физичном случае $n = 3$ этот результат позволяет вообще обойтись без ограничений на рост нелинейной функции f.

Кроме того, в первой главе получен ряд вспомогательных результатов, таких как оценки решений в весовых соболевских пространствах, свойство сглаживания для разности двух решений (0.1), инъективность оператора S_t и т.д., которые систематически используются в следующих главах для исследования пространственно-временной динамики, порождаемой задачей (0.1). В частности, рассмотрена также более общая краевая задача вида (0.1) с неоднородным и неавтономным краевым условием

$$u\big|_{\partial\Omega} = u^0(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$$

и получен аналог теоремы 0.1 для этой задачи.

Вторая глава работы посвящена построению аттрактора $\mathcal{A}$ и исследованию его колмогоровской ε-энтропии. Заметим, прежде всего, что в отличие от случая ограниченных областей, в неограниченной области компактность вложения $W_b^{l_1,q}(\Omega) \subset W_b^{l_2,q}(\Omega)$ при $l_1 > l_2$, вообще говоря, не имеет места, поэтому наличие сглаживания для решений (0.1) еще не влечет наличие компактного поглощающего множества для S_t в фазовом пространстве Φ_b. Следовательно, для построения глобального аттрактора $\mathcal{A}$ в Φ_b необходим более аккуратный анализ поведения решений $u(t,x)$ при $|x| \to \infty$, который, в свою очередь, требует весьма ограничительных и неестественных предположений относительно структуры нелинейности f и внешней силы g (см., например, [42], [55], [67]). В частности, как показано в [82], даже в простейшем случае скалярного уравнения Chafee-Infante в $\mathbb{R}^n$ глобального аттрактора в пространстве Φ_b нет (см., также §5). Поэтому, следуя [58], [68-70], мы будем строить и исследовать так называемый *локально компактный* аттрактор уравнения (0.1). Напомним, что множество $\mathcal{A} \subset \Phi_b$ называется локально компактным аттрактором полугруппы S_t, если выполнены следующие условия:

1) множество $\mathcal{A}$ ограничено в Φ_b и компактно в $\Phi_{loc} := W^{2,q}_{loc}(\overline{\Omega})$;

2) множество $\mathcal{A}$ строго инвариантно, то есть $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$ при $t \geq 0$;

3) множество $\mathcal{A}$ притягивает ограниченные в Φ_b подмножества в топологии пространства Φ_{loc}, то есть для любого ограниченного в Φ_b подмножества B и любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ в топологии пространства Φ_{loc} существует $T = T(\mathcal{O}, B)$, такое что

$$S_tB \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}) \quad \text{при} \quad t \geq T.$$

Теорема 0.2. *Пусть выполнены условия теоремы 0.1. Тогда полугруппа S_t, определенная по формуле* (0.11), *обладает локально компактным аттрактором $\mathcal{A}$, который допускает следующее стандартное описание:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}\big|_{t=0},$$

где через $\mathcal{K}$ обозначено так называемое ядро уравнения (0.1), *то есть множество всех определенных при $t \in \mathbb{R}$ и ограниченных решений $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \Phi_b(\Omega))$ уравнения* (0.1).

Отметим, что в условиях теоремы 0.1 аттрактор $\mathcal{A}$, как правило, имеет бесконечную размерность (см. [11], [82]), поэтому мы будем исследовать его колмогоровскую ε-энтропию. Более того, так как аттрактор $\mathcal{A}$ не компактен в Φ_b, но его сужения на любой шар $\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}$ компактны, то естественно рассмотреть ε-энтропию $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}, \Phi_b)$ и исследовать ее зависимость от трех параметров ε, R и x_0. Следующая теорема дает оценку сверху для этой величины.

Теорема 0.3. *Пусть выполнены условия теоремы 0.1. Тогда колмогоровская ε-энтропия сужений аттрактора $\mathcal{A}$ на шары $B^R_{x_0}$ допускает следующую оценку:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}, \Phi_b(\Omega \cap B^R_{x_0}) \right) \le C \operatorname{vol}\left(\Omega \cap B^{R+K\ln_+ R_0/\varepsilon}_{x_0}\right) \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}, \quad (0.12)$$

где $\ln_+ z := \max\{\ln z, 0\}$, $\operatorname{vol}(V)$ – *n-мерный объем области V, а константы C, K и R_0 не зависят от $\varepsilon > 0$, $R > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

В частности, в случае ограниченной области Ω из оценки (0.12) вытекает, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, \Phi_b(\Omega)\right) \le C \operatorname{vol}(\Omega) \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}, \quad (0.13)$$

откуда следует, что фрактальная размерность $\dim_f(\mathcal{A})$ аттрактора конечна и допускает оценку сверху

$$\dim_f(\mathcal{A}) \le C \operatorname{vol}(\Omega), \quad (0.14)$$

которая дает правильную асимптотику зависимости фрактальной размерности аттрактора от выбора ограниченной области Ω (см., например, [3], [76]). Таким образом, формула (0.12) может быть рассмотрена как естественное обобщение оценок (0.13) и (0.14) на случай неограниченной области Ω (см. также работы [10], [79] и [26] по поводу аналогичных оценок ε-энтропии аттракторов для диссипативного волнового уравнения и эллиптической системы в цилиндрической области соответственно).

В другом частном случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ из оценки (0.12) следует, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}, \Phi_b(B^R_{x_0}) \right) \le C' \left(R + K \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon} \right)^n \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}. \quad (0.15)$$

Отметим также, что в случае $R \gg \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ оценка вида (0.15) для аттрактора уравнения Гинзбурга-Ландау в $\mathbb{R}^2$ была получена в работе [50].

Более того, для случая пространственно-однородной системы уравнений (0.1) получены оценки снизу для ε-энтропии аттрактора, показывающие точность оценки (0.15).

Теорема 0.4. *Пусть выполнены условия теоремы 0.1, и пусть дополнительно*

$$\Omega = \mathbb{R}^n, \quad g(x) \equiv g_0 \in \mathbb{R}^k, \quad \vec{L}(x) \equiv \vec{L}_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{0.16}$$

Предположим также, что система (0.1) *допускает хотя бы одно пространственно-однородное экспоненциально неустойчивое положение равновесия* $u(t,x) \equiv z_0 \in \mathbb{R}^k$, *то есть*

$$\sigma(a\Delta_x - (L, \nabla_x) - \lambda_0 - f'(z_0)) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \neq \varnothing. \tag{0.17}$$

Тогда ε*-энтропия аттрактора* $\mathcal{A}$ *уравнения* (0.1) *допускает следующую оценку снизу:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}, \Phi_b(B^R_{x_0}) \right) \geq C_1 R^n \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad C_1 > 0, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1. \tag{0.18}$$

Более того, для случая $R = 1$ *оценка* (0.18) *может быть уточнена следующим образом:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}\big|_{B^1_{x_0}}, \Phi_b(B^1_{x_0}) \right) \geq C_2 \left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\left(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^n} \right)^{n+1}, \tag{0.19}$$

где константы C_1 *и* C_2 *не зависят от* R *и* ε.

Таким образом, в случае $R \gg \ln \frac{1}{\varepsilon}$ или $R \sim \ln \frac{1}{\varepsilon}$ оценка (0.15) дает точный вид асимптотики для соответствующей ε-энтропии аттрактора, а для случая $R \ll \ln \frac{1}{\varepsilon}$ (в частности, для $R = 1$) оценки ε-энтропии сверху и снизу совпадают с точностью до двойного логарифма от $\frac{1}{\varepsilon}$ (в степени $n(n+1)$). Заметим также, что из оценки (0.19) следует, что сужение $\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}$ аттрактора $\mathcal{A}$ на любой шар $B^R_{x_0}$ имеет бесконечную фрактальную размерность.

Третья глава работы посвящена более детальному исследованию пространственно-однородного случая системы уравнений (0.1) (то есть, при выполнении условий (0.16)). В этом случае аттрактор $\mathcal{A}$ обладает важным дополнительным свойством, а именно, он оказывается инвариантным относительно группы $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ пространственных сдвигов:

$$T_h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad T_h\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad h \in \mathbb{R}^n, \quad (T_h u_0)(x) := u_0(x+h), \tag{0.20}$$

и следовательно, $(n+1)$-параметрическая полугруппа, $\mathbb{S}_{(t,h)}$, определенная по формуле

$$\mathbb{S}_{(t,h)}u_0 := T_h \circ S_t u_0, \quad \mathbb{S}_{(t,h)}\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad (t,h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \tag{0.21}$$

действует на аттракторе $\mathcal{A}$ уравнения (0.1). Мы интерпретируем эту полугруппу как динамическую систему с многомерным временем, описывающую пространственно-временную динамику, порождаемую системой уравнений (0.1), и будем исследовать ее динамические характеристики.

Напомним, что в случае ограниченной области Ω полугруппа S_t, действующая на аттракторе $\mathcal{A}$ системы (0.1), имеет конечную топологическую энтропию (см., например, [63], [76])

$$h_{top}(\mathcal{A}, S_t) < \infty.$$

Следующий результат является аналогом этого факта для случая неограниченной области $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Теорема 0.5. *Пусть выполнены условия теоремы 0.1 и условие* (0.16). *Тогда топологическая энтропия полугруппы* (0.21), *действующей на аттракторе, является конечной:*

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) < \infty. \tag{0.22}$$

Представляет интерес также изучение динамики полугрупп, порожденных ограничением динамической системы $\mathbb{S}_{(t,h)}$ на произвольные k-мерные гиперплоскости $V_k \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, то есть полугрупп, определяемых по формуле

$$\mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)} := \{\mathbb{S}_{(t,h)}, t \geq 0, \ (t,h) \in V_k\}, \tag{0.23}$$

где $V_k \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n$ – произвольная фиксированная k-мерная гиперплоскость и $0 \leq k \leq n+1$. Наиболее естественными являются следующие две возможности выбора гиперплоскости V_k:

1. $k = n$, $V_n = \mathbb{R}^n_x$, тогда, очевидно $\mathbb{S}^{V_n}_{(t,h)} := T_h$, и следовательно, при этом выборе V_k описывается чисто пространственная часть динамики, порождаемой полугруппой $\mathbb{S}_{(t,h)}$;

2. $k=1$, $V_1=\mathbb{R}_t$, тогда $\mathbb{S}^{V_1}_{(t,h)}:=S_t$, и следовательно, этот выбор V_k отвечает чисто временной части описываемой динамики.

Отметим также, что и промежуточные возможности выбора гиперплоскостей V_k, описывающие взаимодействие пространственных и временных мод рассматриваемой системы, представляют самостоятельный интерес.

Для получения количественной информации о сложности динамики, порождаемой полугруппами вида (0.23) представляется естественным исследовать их топологическую энтропию

$$h_k^{V_k}(\mathcal{A}):=h_{top}(\mathcal{A},\mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)}). \tag{0.24}$$

Однако, как будет показано ниже, в случае $k<n+1$ эти величины оказываются, вообще говоря, бесконечными. Для того, чтобы получить конечные характеристики динамики для этого случая мы фиксируем метрику на аттракторе $\mathcal{A}$, индуцированную вложением аттрактора $\mathcal{A}$ в весовое пространство $L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)$, и введем модифицированную топологическую энтропию $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A})$ полугруппы (0.23), определение которой отличается от классического определения топологической энтропии наличием нормирующего фактора $\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-1}$ (см. §9 по поводу строгого определения). Например, в случае $V_n=\mathbb{R}^n_x$ соответствующая модифицированная энтропия определяется по формуле

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}):=\widehat{h}_n^{V_n}(\mathcal{A}):=\limsup_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A},L^\infty([0,R]^n)\right),$$

а для случая $V_1=\mathbb{R}_t$ – по следующей формуле:

$$\widehat{h}_t(\mathcal{A}):=\widehat{h}_1^{V_1}(\mathcal{A}):=$$
$$=\limsup_{\varepsilon\to0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-n}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{T}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K},L^\infty([0,T],L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n))\right),$$

где через $\mathcal{K}$ обозначено ядро уравнения (0.1) (см. теорему 0.2).

Отметим, что, в отличие от топологической энтропии (0.24), величины $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A})$ не являются топологическими инвариантами, а только метрическими инвариантами (подобно фрактальной размерности), и следовательно, зависят от способа метризации локальной топологии на аттракторе. По многим причинам (см. §9) выбор метрики пространства $L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)$ с экспоненциально убывающим весом представляется нам наиболее естественным.

Следующая теорема показывает, что использование нормирующего множителя $\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-1}$ действительно обеспечивает конечность введенных характеристик, а также описывает взаимосвязь между модифицированными топологическими энтропиями, отвечающими различным подпространствам V_k.

Теорема 0.6. *Пусть выполнены условия теоремы 0.5. Тогда для любого k, $0 \le k \le n+1$ и для любой k-мерной гиперплоскости V_k соответствующая модифицированная энтропия является конечной:*

$$\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) < \infty. \tag{0.25}$$

Более того, если $V_k \subset V_l$ (при $k < l$), то

$$\widehat{h}_l^{V_l}(\mathcal{A}) \le K^{l-k}\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}), \tag{0.26}$$

где константа $K > 0$ зависит только от параметров уравнения (0.1).

Формулу (0.26) можно считать обобщением классического результата о связи между фрактальной размерностью и топологической энтропией на случай многомерного времени. Действительно, в случае системы обыкновенных уравнений вида (0.1) $n = 0$, поэтому $\widehat{h}_1(\mathcal{A})$ совпадает с топологической энтропией, $\widehat{h}_0(\mathcal{A})$ – с фрактальной размерностью аттрактора $\mathcal{A}$, а оценка (0.26) принимает классический вид:

$$h_{top}(\mathcal{A}) \le K \dim_f(\mathcal{A})$$

(см., например, [63]).

Рассмотрим теперь некоторые естественные классы уравнений вида (0.1), для которых удается получить оценки снизу величин $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A})$ и частично описать природу хаотической динамики, порождаемой этими уравнениями. Мы начнем с рассмотрения пространственной динамики и феномена пространственного хаоса.

Следующая теорема показывает, что пространственная динамическая система (0.20) является хаотической на аттракторе, если уравнение (0.1) допускает хотя бы одно (экспоненциально) неустойчивое пространственно-однородное положение равновесия.

Теорема 0.7. *Пусть выполнены условия теоремы 0.4. Тогда модифицированная топологическая энтропия $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A})$ пространственной динамической системы* (0.20) *($V_n = \mathbb{R}^n$) является конечной и строго положительной:*

$$0 < C_1 < \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}) < \infty, \quad \text{и, следовательно,} \quad h_{top}(\mathcal{A}, T_h) = \infty. \qquad (0.27)$$

Напомним, что в классической (конечномерной) теории динамических систем для описания хаотической динамики часто используются вложения схем Бернулли $\{0, \cdots, N-1\}^{\mathbb{Z}}$ с конечным числом символов в рассматриваемую динамическую систему (см. [63] и цитированную там литературу). Однако, как известно, схемы Бернулли с конечным числом символов имеют конечную топологическую энтропию и, следовательно, не могут дать адекватного описания динамики с бесконечной топологической энтропией. Поэтому, для исследования пространственной динамической системы (0.20) мы будем использовать схемы Бернулли с бесконечным (континуальным) числом символов.

Определение 0.1. Пусть $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}, \ |z| \le 1\}$ – единичный диск в $\mathbb{C}$. Рассмотрим пространство $\mathcal{M} := \mathbb{D}^{\mathbb{Z}^n}$ отображений $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{D}$, наделенное топологией локально-компактной сходимости и определим символическую динамику $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ с континуальным числом символов $\omega \in \mathbb{D}$ по следующей стандартной формуле:

$$(\mathcal{T}_l v)(m) := v(m+l), \quad m, l \in \mathbb{Z}^n, \quad v \in \mathcal{M}. \qquad (0.28)$$

Следующая теорема дает описание феномена пространственного хаоса в терминах модельной динамической системы (0.28).

Теорема 0.8. *Пусть выполнены условия теоремы 0.4. Тогда существуют положительное число $\sigma > 0$, замкнутое подмножество $B \subset \mathcal{A}$ и гомеоморфизм $\tau : \mathcal{M} \to B$, такие что*

$$T_{\sigma l} B = B \quad \text{и} \quad T_{\sigma l}\tau(v) = \tau(\mathcal{T}_l v), \quad \forall l \in \mathbb{Z}^n, \ v \in \mathcal{M}. \qquad (0.29)$$

Более того, этот гомеоморфизм является липшицевым при соответствующем выборе метрик на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ и сохраняет модифицированную топологическую энтропию:

$$0 < \sigma^{-n}\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M}) = \widehat{h}_{sp}(B) \le \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}) < \infty.$$

Одним из следствий этой теоремы является следующий результат, показывающий, что любая конечномерная динамика может быть реализована с точностью до гомеоморфизма ограничением пространственной динамической системы на подходящее подмножество аттрактора.

Следствие 0.1. *Пусть выполнены условия теоремы 0.4, и пусть* $K \subset \mathbb{R}^N$ *– произвольное компактное подмножество в* $\mathbb{R}^N$. *Предположим также, что* $F_1, \cdots, F_n : K \to K$ *– произвольные попарно коммутирующие гомеоморфизмы, то есть*

$$F_i \circ F_j = F_j \circ F_i, \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Тогда существуют положительное число $\gamma = \gamma(N) > 0$ *и гомеоморфизм*

$$\widehat{\tau} : K \to \widehat{\tau}(K) \subset \mathcal{A}, \tag{0.30}$$

такой что

$$T_{\gamma l}\widehat{\tau}(k) = \widehat{\tau}\left(F_1^{l_1} \circ \cdots \circ F_n^{l_n} k\right), \quad k \in K, \quad l \in \mathbb{Z}^n, \tag{0.31}$$

где через $F_i^{l_i}$ *обозначена* l_i*-тая итерация отображения* F_i.

Наша следующая цель – получить описание динамики, порождаемой полугруппой $\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_n}$, аналогичное теоремам 0.7 и 0.8, для случая, когда гиперплоскость V_n содержит временные направления, то есть $V_n \notin \mathbb{R}_x^n$. Для этого мы предположим, что векторное поле $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$ имеет специальный вид:

$$\vec{L} := L\vec{e}_1 = L(1, 0, \cdots, 0), \quad L \in \mathbb{R}_+. \tag{0.32}$$

Здесь и далее символом $\vec{e}_i$ будет обозначаться i-тый координатный вектор в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что на самом деле, условие (0.32) не ограничивает общности, так как случай произвольного $\vec{L} \in \mathbb{R}^n$ сводится к (0.32) подходящей ортогональной заменой координаты x, которая не меняет вид лапласиана в уравнении (0.1). При этой замене, очевидно, $L = |\vec{L}|$.

Следующая теорема показывает, что динамика $\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_n}$ для гиперплоскости

$$V_n := \mathrm{span}\{\vec{e}_t, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}, \tag{0.33}$$

ортогональной в $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ направлению векторного поля $\vec{L}$, оказывается хаотической, если число $L = |\vec{L}|$ достаточно велико.

Теорема 0.9. *Пусть выполнены условия теоремы 0.4, и пусть векторное поле $\vec{L}$ имеет вид* (0.32). *Тогда существует некоторое положительное число $L_0 = L_0(a, f, \lambda_0)$, такое что, если, дополнительно,*

$$L = |\vec{L}| > L_0, \tag{0.34}$$

то модифицированная топологическая энтропия аттрактора в направлении гиперплоскости (0.33) *является строго положительной:*

$$0 < C < \widehat{h}_n^{V_n}(\mathcal{A}) < \infty \quad \text{и} \quad h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}^{V_n}) = \infty, \tag{0.35}$$

и, следовательно (по теореме 0.6), модифицированная топологическая энтропия в направлении времени ($V_1 = \mathbb{R}_t$) также является строго положительной:

$$0 < C_1 < \widehat{h}_t(\mathcal{A}) < \infty \quad \text{и} \quad h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = \infty. \tag{0.36}$$

Таким образом, для описания пространственно-временной динамики $\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_n}$ в гиперплоскости (0.33) также естественно использовать модельную динамическую систему $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$, введенную в определении 0.1.

Теорема 0.10. *Пусть выполнены условия теоремы 0.4 и условия* (0.32) *и* (0.34). *Предположим также, что матрица диффузии a в системе* (0.1) *является нормальной, то есть $aa^* = a^*a$. Тогда существуют положительное число $\alpha > 0$ и гомеоморфное вложение*

$$\widehat{\tau} : \mathcal{M} \to \mathcal{A}, \tag{0.37}$$

такое что

$$S_{\alpha l}\widehat{\tau}(v_0) = \widehat{\tau}(\mathcal{T}_l^{x_1} v_0), \quad T_{\alpha l}^{x_i}\widehat{\tau}(v_0) = \widehat{\tau}(\mathcal{T}_l^{x_i} v_0)\ ,\ i = 2, \cdots, n, \tag{0.38}$$

для любых $l \in \mathbb{Z}$ и $v_0 \in \mathcal{M}$ (здесь и далее $T_h^{x_i} := T_{h\vec{e}_i}$, $\mathcal{T}_l^{x_i} := \mathcal{T}_{l\vec{e}_i}$). Более того,

$$\widehat{h}_n^{V_n}(\widehat{\tau}(\mathcal{M})) > 0,$$

где $V_n := \operatorname{span}\{\vec{e}_t, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$.

Как и в случае пространственной динамики, вложение (0.37) позволяет доказать, что любая конечномерная динамика может быть реализована сужением полугруппы $\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_n}$ на подходящее инвариантное подмножество аттрактора.

Следствие 0.2. *Пусть выполнены условия теоремы 0.10. Пусть также $K \subset \mathbb{R}^N$ – произвольное компактное множество в $\mathbb{R}^N$, а $F_1, \cdots, F_n : K \to K$ – произвольные попарно коммутирующие гомеоморфизмы, то есть*

$$F_i \circ F_j = F_j \circ F_i, \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{0.39}$$

Тогда существуют положительное число $\gamma = \gamma(N) > 0$ и гомеоморфизм

$$\tilde{\tau} : K \to \tilde{\tau}(K) \subset \mathcal{A}, \tag{0.40}$$

такой что

$$S_{\gamma l_1} \circ T^{x_2}_{\gamma l_2} \circ \cdots \circ T^{x_n}_{\gamma l_n} \tilde{\tau}(k) = \tilde{\tau}\left(F_1^{l_1} \circ \cdots \circ F_n^{l_n} k\right), \quad k \in K, \quad l \in \mathbb{Z}^n, \tag{0.41}$$

где через $F_i^{l_i}$ обозначена l_i-тая итерация отображения F_i.

Для иллюстрации описанных выше результатов рассмотрен ряд примеров естественных уравнений математической физики, имеющих вид (0.1) (таких как уравнение Chafee-Infante, комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау и др., см. §14). В частности, показано, что в градиентном случае

$$f(u) := \nabla F(u), \quad a = a^*, \quad \vec{L} \equiv 0 \tag{0.42}$$

расширенная полугруппа $\mathbb{S}_{(t,h)}$, соответствующая уравнению (0.1) имеет нулевую топологическую энтропию

$$h_{top}(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = 0. \tag{0.43}$$

Как известно (см., например, [63]), в случае градиентной системы в ограниченной области топологическая энтропия полугруппы S_t равна нулю:

$$h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = 0 \tag{0.44}$$

(благодаря наличию глобальной функции Ляпунова). Формула (0.43) является естественным обобщением этого факта на случай неограниченной области $\Omega = \mathbb{R}^n$ (отметим, также, что в неограниченной области нет глобальной функции Ляпунова, поэтому получить прямой аналог формулы (0.44) для этого случая не удается).

Кроме того, на следующем модельном примере исследована зависимость ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ от физических параметров уравнения (0.1):

$$\begin{cases} \partial_t u = \nu a \Delta_x u - \lambda_0 u - f(u) + g, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{0.45}$$

где матрица диффузии a и нелинейная функция f удовлетворяют условиям теоремы 0.4, а $\nu > 0$ – малый параметр (см. §14). В частности, показано, что модифицированная топологическая энтропия $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A})$ имеет следующую асимптотику при $\nu \to 0$:

$$C_1 \nu^{-n/2} \le \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}) \le C_2 \nu^{-n/2}, \tag{0.46}$$

где константы $C_i > 0$ не зависят от $\nu \to 0$. Формула (0.46) является естественным обобщением аналогичной асимптотики для фрактальной размерности аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (0.45) в ограниченной области на случай $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Глава 1. Априорные оценки. Существование решений. Гладкость.

В этой главе доказана однозначная разрешимость квазилинейной параболической системы системы (0.1) в неограниченной области Ω и получен ряд оценок для ее решений, которые будут использованы в следующих главах для построения и исследования аттрактора этой системы.

Параграф 1 настоящей главы содержит определения и некоторые свойства весовых соболевских пространств, которые будут систематически использоваться в дальнейшем.

В параграфе 2 сформулировано и доказано несколько результатов о максимальной регулярности решений линейных эллиптических и параболических краевых задач в неограниченных областях в весовых соболевских пространствах, которые необходимы для исследования нелинейной системы (0.1).

В параграфе 3 получен ряд априорных оценок для решений нелинейной задачи (0.1), на основании которых доказана ее разрешимость. Более того, в этом параграфе исследована несколько более общая задача вида (0.1) с неоднородными и неавтономными граничными условиями $u\big|_{\partial\Omega} = u^0(t)$. Это обобщение будет существенно использовано в третьей главе для построения вспомогательной пространственной динамической системы и исследования феномена пространственно-временного хаоса, порождаемого системой уравнений (0.1).

В параграфе 4 доказана единственность решения задачи (0.1), построенного в предыдущем параграфе, и получен ряд оценок для разности между двумя решениями этой задачи, соответствующих различным начальным условиям. В частности, получена сглаживающая оценка для этих разностей в весовых соболевских пространствах, которая играет фундаментальную роль при оценке сверху ε-энтропии аттрактора, и доказана инъективность разрешающего оператора задачи (0.1) в соответствующем фазовом пространстве.

§1 *Функциональные пространства.*

В этом параграфе мы введем ряд функциональных пространств, используемых в дальнейшем для исследования нелинейных уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях, и сформулируем некоторые свойства этих пространств. Мы начнем с определения класса допустимых неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. Назовем область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ регулярной если выполнены следующие условия:

1) Существует положительное число $R_0 > 0$, такое что для любого $x_0 \in \overline{\Omega}$ существует гладкая область $V_{x_0} \subset \Omega$, такая что

$$B_{x_0}^{R_0} \cap \Omega \subset V_{x_0} \subset B_{x_0}^{R_0+1} \cap \Omega. \tag{1.1}$$

2) Для любого $x_0 \in \overline{\Omega}$ существует диффеоморфизм $\theta_{x_0} : B_0^2 \to B_{x_0}^{R_0+2}$, такой что $\theta_{x_0}(x) = x_0 + p_{x_0}(x)$, $\theta_{x_0}(B_0^1) = V_{x_0}$ и

$$\|p_{x_0}\|_{C^N} + \|p_{x_0}^{-1}\|_{C^N} \le K, \tag{1.2}$$

где константа K не зависит от $x_0 \in \Omega$, а N – достаточно большое положительное число.

3) Существует последовательность $\Omega_M \subset \Omega$, $M \in \mathbb{N}$, ограниченных областей, удовлетворяющих условиям 1) и 2) (с константой K, не зависящей от M), таких что

$$\Omega = \cup_{M=1}^{\infty} \Omega_M, \quad \Omega \cap B_0^M \subset \Omega_M. \tag{1.3}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь случая регулярной области Ω. Более того, для простоты мы будем предполагать, что условия 1) и 2) определения 1.1 выполнены при $R_0 = 2$.

Замечание 1.1. Заметим, что в случае ограниченной области $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ее регулярность в смысле определения 1.1 эквивалентна тому, что ее граница $\partial\Omega$ является гладким $(n-1)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. В случае же неограниченной области, как показывает пример

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \ge x^2 \sin(x^2)\}, \tag{1.4}$$

одной гладкости границы недостаточно для того, чтобы обеспечить ее 'регулярность' при $|x| \to \infty$. Таким образом, для исключения областей вида (1.4) необходимы дополнительные условия. Наиболее удобным для наших целей является выбор этих условий в виде (1.1)–(1.3).

Введем теперь класс допустимых весовых функций.

Определение 1.2. Назовем функцию $\phi \in C_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\phi > 0$, весовой функцией экспоненциального роста $\mu \geq 0$ если существует константа $C_\phi > 0$, такая что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено следующее неравенство:

$$\phi(x+y) \leq C_\phi e^{\mu|x|}\phi(y). \tag{1.5}$$

Аналогично, назовем функцию $\phi \in C_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\phi > 0$, весовой функцией степенного роста $\mu > 0$ если существует константа $C_\phi > 0$, такая что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\phi(x+y) \leq C_\phi \left((1+|y_1|^2)(1+|y_2|^2)\cdots(1+|y_n|^2)\right)^{\mu/2}\phi(x). \tag{1.6}$$

Очевидно, что весовая функция ϕ степенного роста $\nu \geq 0$ автоматически удовлетворяет (1.5) при любом $\mu > 0$. Более того, как нетрудно показать, из (1.5) следует оценка

$$\phi(x+y) \geq C_\phi^{-1} e^{-\mu|x|}\phi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7}$$

Таким образом, весовая функция экспоненциального роста μ удовлетворяет следующему неравенству:

$$C_\phi^{-1} e^{-\mu R}\phi(x) \leq \inf\nolimits_{|x_0|\leq R}\phi(x-x_0) \leq \\ \leq \sup\nolimits_{|x_0|\leq R}\phi(x-x_0) \leq C_\phi e^{\mu R}\phi(x),\ R \in \mathbb{R}_+. \tag{1.8}$$

Наиболее важным для нас модельным примером весовых функций экспоненциального роста является следующий класс функций:

$$\phi_{\varepsilon,x_0}(x) = e^{-\varepsilon|x-x_0|},\ \varepsilon \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Очевидно, что эти весовые функции имеют порядок роста $|\varepsilon|$ и удовлетворяют неравенству (1.5) равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (то есть константа $C_{\phi_{\varepsilon,x_0}} = 1$ в (1.5) не зависит от x_0).

Другим важным примером весовых функций экспоненциального роста, обобщающим пример (1.9), являются функции

$$\phi_{\varepsilon,V}(x) := e^{-\varepsilon\,\mathrm{dist}(x,V)} \tag{1.9'}$$

для произвольного множества $V \subset \mathbb{R}^n$. Очевидно, что эти функции имеют порядок роста $|\varepsilon|$ и удовлетворяют (1.5) с константой $C_\phi = 1$.

Аналогично, модельным примером весовых функций степенного роста является следующий класс функций:

$$\varphi_{\mu,x_0}(x) = \big((1+|x^1-x_0^1|^2)\cdots(1+|x^n-x_0^n|^2)\big)^{\mu/2}, \ \mu\in\mathbb{R}. \qquad (1.10)$$

Очевидно, что весовые функции (1.10) имеют степенной порядок роста $|\mu|$ и удовлетворяют (1.6) равномерно по $x_0\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь весовые пространства Соболева, соответствующие введенным выше весовым функциям.

Определение 1.3. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ - некоторая неограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и пусть ϕ – весовая функция экспоненциального роста μ. Определим пространство

$$L^p_\phi(\Omega) = \left\{u\in D'(\Omega)\ :\ \|u,\Omega,\|^p_{\phi,0,p}\equiv\int_\Omega \phi(x)|u(x)|^p\,dx<\infty\right\}.$$

Аналогично, весовое пространство Соболева $W^{l,p}_\phi(\Omega)$, $l\in\mathbb{N}$, определяется как пространство обобщенных функций, обобщенные производные которых до порядка l включительно принадлежат пространству $L^p_\phi(\Omega)$ (см., например, [28] или [30]). Для упрощения обозначений мы будем писать далее $W^{l,p}_{\{\varepsilon\}}$ вместо $W^{l,p}_{e^{-\varepsilon|x|}}$.

В дальнейшем нам понадобится еще один класс весовых пространств Соболева (см. [56], [82]):

$$W^{l,p}_{b,\phi}(\Omega) = \left\{u\in D'(\Omega)\ : \|u,\Omega\|^p_{b,\phi,l,p} = \sup_{x_0\in\Omega}\phi(x_0)\|u,\Omega\cap B^1_{x_0}\|^p_{l,p}<\infty\right\}.$$

Здесь и далее $B^R_{x_0}$ – шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в x_0, а $\|u,V\|_{l,p}$ означает $\|u\|_{W^{l,p}(V)}$. Мы будем писать в дальнейшем $W^{l,p}_b$ вместо $W^{l,p}_{b,1}$.

Следующее предложение позволяет ввести более удобную эквивалентную норму в пространствах $W^{l,p}_\phi$.

Предложение 1.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ регулярная область, $\phi(x)$ – весовая функция экспоненциального роста, а R – положительное число. Тогда* *справедлива следующая оценка:*

$$C_1 \int_\Omega \phi(x)|u(x)|^p\,dx \le \int_\Omega \phi(x_0) \int_{\Omega\cap B^R_{x_0}} |u(x)|^p\,dx\,dx_0 \le \\ \le C_1 \int_\Omega \phi(x)|u(x)|^p\,dx, \quad (1.11)$$

где константы $C_i = C_i(R)$ зависят от R, от константы K, участвующей в определении регулярной области, и от константы C_ϕ, введенной в неравенстве (1.5) *(и не зависит от конкретного вида Ω и ϕ).*

Доказательство. Действительно, поменяв порядок интегрирования в средней части неравенства (1.11), получим

$$\int_\Omega \phi(x_0) \int_{\Omega\cap B^R_{x_0}} |u(x)|^p\,dx\,dx_0 = \\ = \int_\Omega |u(x)|^p \left(\int_\Omega \phi(x_0)\chi_{\Omega\cap B^R_x}(x_0)\,dx_0 \right) dx. \quad (1.12)$$

Так как область Ω предполагается регулярной, то

$$0 < C_1' \le \mathrm{vol}(\Omega\cap B^R_{x_0}) \le C_2'. \quad (1.13)$$

Оценка (1.11) следует теперь из (1.8), (1.12) и (1.13). Предложение 1.1 доказано.

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия предложения 1.1. Тогда эквивалентная норма в пространстве $W^{l,p}_\phi(\Omega)$ может быть задана следующим образом:*

$$\|u,\Omega\|_{\phi,l,p} = \left(\int_\Omega \phi(x_0)\|u,\Omega\cap B^R_{x_0}\|^p_{l,p}\,dx_0 \right)^{1/p}. \quad (1.14)$$

В частности, нормы (1.14) *при разных $R\in\mathbb{R}_+$ эквивалентны.*

В дальнейшем нам понадобятся также пространства $W^{s,p}_\phi$ с дробным числом производных $s\notin\mathbb{Z}$. Напомним (см., например [21], [30]), что норма в невесовом пространстве $W^{s,p}(\Omega)$ задается следующим образом:

$$\|u,\Omega\|^p_{s,p} = \\ = \|u,\Omega\|^p_{[s],p} + \sum_{|\alpha|=[s]} \int_{x\in\Omega}\int_{y\in\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+lp}}\,dx\,dy, \quad (1.15)$$

где $s = [s] + l$, $0 < l < 1$.

Более того, как нетрудно показать, рассуждая аналогично предложению 1.1, для любой регулярной области Ω справедливо неравенство

$$\|u, \Omega\|^p_{s,p} \le C_1 \int_{x_0 \in \Omega} \|u, \Omega \cap B^R_{x_0}\|^p_{s,p} \, dx_0 \le C_2 \|u, \Omega\|^p_{s,p}. \tag{1.16}$$

Определение 1.3. Пусть ϕ – весовая функция экспоненциального роста и $s \in \mathbb{R}$. Определим пространство $W^{s,p}_\phi(\Omega)$ как подпространство обобщенных функций, для которых конечна норма (1.14).

Нетрудно показать, рассуждая так же, как и в доказательстве предложения 1.1, что и в случае нецелых l нормы (1.14) эквивалентны при разных $R \in \mathbb{R}_+$, поэтому определение 1.3 имеет смысл. Более того, как показывает оценка (1.16), это определение согласовано со стандартным определением (1.15) в случае невесовых пространств.

Следующие несколько простых предложений имеют фундаментальное значение для вывода оценок решений уравнений вида (0.1) в весовых пространствах и будут постоянно использоваться в дальнейшем.

Предложение 1.2. *Пусть $u \in L^p_\phi(\Omega)$ для некоторой весовой функции ϕ экспоненциального роста μ. Тогда для любого $1 \le q \le \infty$ и любого $\varepsilon > \mu$ справедлива следующая оценка:*

$$\left(\int_\Omega \phi(x_0)^q \left(\int_\Omega e^{-\varepsilon|x-x_0|}|u(x)|^p \, dx\right)^q dx_0\right)^{1/q} \le$$
$$\le C \int_\Omega \phi(x)|u(x)|^p \, dx, \tag{1.17}$$

где константа C зависит только от ε, μ и от константы C_ϕ, определенной в (1.5) (и не зависит от Ω и конкретного вида функции ϕ).

Кроме того, если $u \in L^\infty_\phi(\Omega)$, то

$$\sup_{x_0 \in \Omega} \left\{\phi(x_0) \sup_{x \in \Omega}\{e^{-\varepsilon|x-x_0|}|u(x)|\}\right\} \le C \sup_{x \in \Omega}\{\phi(x)|u(x)|\}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть $q = 1$. Тогда, согласно (1.5),

$$\phi(x_0)e^{-\varepsilon|x-x_0|} \le C\phi(x)e^{\mu|x-x_0|}e^{-\varepsilon|x-x_0|} \le C\phi(x)e^{-(\varepsilon-\mu)|x-x_0|}$$

и, следовательно,

$$\int_{\Omega}\phi(x_0)\int_{\Omega}e^{-\varepsilon|x-x_0|}|u(x)|^p\,dx\,dx_0\leq$$
$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega}\phi(x)e^{-(\varepsilon-\mu)|x-x_0|}|u(x)|^p\,dx\,dx_0\leq C_1\int_{\Omega}\phi(x)|u(x)|^p\,dx.$$

Пусть теперь $q=\infty$. Тогда

$$\sup_{x_0\in\Omega}\{\phi(x_0)\int_{\Omega}e^{-\varepsilon|x-x_0|}|u(x)|^p\,dx\}\leq$$
$$\leq C\int_{\Omega}\phi(x)|u(x)|^p\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}\{e^{-(\varepsilon-\mu)|x-x_0|}\}\,dx\leq C\int_{\Omega}\phi(x)|u(x)|^p\,dx.$$

Итак, оценка (1.17) доказана для $q=1$ и $q=\infty$. Для проверки этой оценки в общем случае $1<q<\infty$ достаточно воспользоваться интерполяционным неравенством

$$\|\cdot\|_{L^q}\leq\|\cdot\|_{L^1}^{1/q}\|\cdot\|_{L^\infty}^{1-1/q}.$$

Оценка (1.18) проверяется аналогично. Предложение 1.2 доказано.

Предложение 1.3. *Пусть Ω регулярная область, $u\in W^{l,p}_{b,\phi}(\Omega)$, где ϕ весовая функция экспоненциального роста $\mu<\varepsilon$. Тогда*

$$C_1\|u,\Omega\|^p_{b,\phi,l,p}\leq$$
$$\leq\sup_{x_0\in\Omega}\left\{\phi(x_0)\int_{x\in\Omega}e^{-\varepsilon|x-x_0|}\|u,\Omega\cap B^1_x\|^p_{l,p}\,dx\right\}\leq C_2\|u,\Omega\|^p_{b,\phi,l,p},\tag{1.19}$$

где константы $C_i=C_i$ зависят от константы K, участвующей в определении регулярной области, и от константы C_ϕ, введенной в неравенстве (1.5) *(и не зависят от конкретного вида Ω и ϕ).*

Доказательство. Действительно,

$$\sup_{x_0\in\Omega}\left\{\phi(x_0)\int_{x\in\Omega}e^{-\varepsilon|x-x_0|}\|u,\Omega\cap B^1_x\|^p_{l,p}\,dx\right\}\leq$$
$$\leq C\sup_{x\in\Omega}\left\{\phi(x)\|u,\Omega\cap B^1_x\|^p_{l,p}\right\}\sup_{x_0\in\Omega}\left\{\int_{x\in\mathbb{R}^n}\phi(x_0)\phi(x)^{-1}e^{-\varepsilon|x-x_0|}\,dx\right\}\leq$$
$$\leq C_1\sup_{x\in\Omega}\left\{\phi(x)\|u,\Omega\cap B^1_x\|^p_{l,p}\right\}\sup_{x_0\in\Omega}\left\{\int_{x\in\mathbb{R}^n}e^{\mu|x-x_0|}e^{-\varepsilon|x-x_0|}\,dx\right\}\leq$$
$$\leq C_2\|u,\Omega\|^p_{b,\phi,l,p}.$$

Обратно, используя очевидное неравенство

$$\|u, \Omega \cap B^1_{x_0}\|^p_{l,p} \le C \int_\Omega e^{-\varepsilon|x-x_0|} \|u, \Omega \cap B^1_x\|^p_{l,p} \, dx, \tag{1.20}$$

получим

$$\|u, \Omega\|^p_{b,\phi,l,p} = \sup_{x_0 \in \Omega} \left\{ \phi(x_0) \|u, \Omega \cap B^1_{x_0}\|^p_{l,p} \right\} \le$$

$$\le C \sup_{x_0 \in \Omega} \left\{ \phi(x_0) \int_\Omega e^{-\varepsilon|x-x_0|} \|u, \Omega \cap B^1_x\|^p_{l,p} \, dx \right\}.$$

Предложение 1.3 доказано.

Предложение 1.4. *Пусть Ω регулярная область, $u \in W^{l,p}_{b,\phi}(\Omega)$, где ϕ весовая функция степенного роста $\mu < N$. Тогда*

$$C_1 \sup_{x_0 \in \Omega} \{\phi(x_0) u(x_0)\} \le$$

$$\le \sup_{x \in \Omega} \left\{ \phi(x) \sup_{y \in \Omega} \left((1 + |x_1 - y_1|^2) \cdots (1 + |x_n - y_n|^2) \right)^{-N/2} u(y) \right\} \le$$

$$\le C_2 \sup_{x_0 \in \Omega} \{\phi(x_0) u(x_0)\} \tag{1.21}$$

с константами C_1, C_2, не зависящими от конкретного вида Ω и ϕ.

Доказательство оценки (1.21) совершенно аналогично (1.19) и поэтому здесь не приводится.

Напомним, что весовые функции (1.9) удовлетворяют условиям (1.5) равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}^n$, следовательно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1.2. *Пусть Ω – регулярная область, $u \in L^p_{\{\delta\}}(\Omega)$ с весовой функцией ϕ экспоненциального роста δ, $0 < \delta < \varepsilon$. Тогда*

$$\left(\int_\Omega e^{-q\delta|x_0 - y|} \left(\int_\Omega e^{-\varepsilon|x-x_0|} |u(x)|^p \, dx \right)^q dx_0 \right)^{1/q} \le$$

$$\le C_{\varepsilon,q} \int_\Omega e^{-\delta|x-y|} |u(x)|^p \, dx, \tag{1.22}$$

где константа $C_{\varepsilon,q}$ не зависит от $y \in \mathbb{R}^n$. Более того, если $u \in L^\infty_{\{\delta\}}(\Omega)$, $\delta < \varepsilon$, то

$$\sup_{x_0 \in \Omega} \left\{ e^{-\delta|x_0-y|} \sup_{x\in\Omega} \{ e^{-\varepsilon|x-x_0|} |u(x)| \} \right\} \le C_{\varepsilon,\delta} \sup_{x\in\Omega} \{ e^{-\delta|x-y|} |u(x)| \}, \quad (1.23)$$

где $C_{\varepsilon,\delta}$ не зависит от $y \in \mathbb{R}^n$.

Для исследования уравнений реакции-диффузии с неоднородными граничными условиями нам понадобятся также весовые пространства обобщенных функций, определенных на границе области $\partial\Omega$.

Определение 1.4. Пусть Ω – регулярная область, а ϕ – весовая функция экспоненциального роста. Аналогично определению 1.3, введем пространство $W^{l,p}_\phi(\partial\Omega)$, как пространство обобщенных функций на $\partial\Omega$, для которых конечна следующая норма:

$$\|u_0, \partial\Omega\|^p_{\phi,l,p} := \int_{\partial\Omega} \phi(s) \|u_0, \partial\Omega \cap B^1_s\|^p_{l,p}\, dS,$$

где через dS обозначена стандартная мера на $\partial\Omega$.

Пространства $W^{l,p}_{b,\phi}(\partial\Omega)$ определяются аналогично.

Рассуждая аналогично предложению 1.1, нетрудно показать, что

$$C_1 \int_{\partial\Omega} \phi(x)|u(x)|^p\, dS_x \le \int_{\partial\Omega} \phi(x_0) \int_{\partial\Omega \cap B^R_{x_0}} |u(x)|^p\, dS_x\, dS_{x_0} \le$$
$$\le C_1 \int_{\partial\Omega} \phi(x)|u(x)|^p\, dS_x \quad (1.24)$$

для любого $R \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, определение 1.4 согласовано со стандартным определением соболевских пространств на многообразии $\partial\Omega$.

Следующие оценки играют существенную роль при исследовании зависимости решений уравнения (0.1) от граничных условий.

Предложение 1.5. *Пусть Ω – регулярная область. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка*

$$\int_{\partial\Omega} e^{-\varepsilon|x-x_0|}\, dS \le C_\varepsilon \quad (1.25)$$

с константой C_ε, не зависящей от x_0.

Доказательство. Действительно, пусть $\vec{n}(x) \in W_b^{1,\infty}(\Omega)$ – произвольное продолжение векторного поля нормалей к границе $\partial\Omega$ внутрь области Ω (существование такого продолжения немедленно следует из предположения о регулярности области Ω). Тогда, согласно формуле Грина,

$$\int_{\partial\Omega} \phi_{\varepsilon,x_0}\, dS = \int_\Omega \operatorname{div}(\phi_{\varepsilon,x_0}\vec{n}(x))\, dx \le C\|\vec{n},\Omega\|_{b,1,\infty}\|\phi_{\varepsilon,x_0},\Omega\|_{1,1} \le C_\varepsilon.$$

Предложение 1.5 доказано.

Следствие 1.3. *Пусть выполнены условия предложения 1.5. Тогда*

$$\int_{\partial\Omega} e^{-\varepsilon|x-x_0|}\, dS \le C_\varepsilon e^{-\varepsilon/2\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)}, \tag{1.26}$$

где через $\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)$ *обозначено расстояние от x_0 до границы $\partial\Omega$.*

Действительно,

$$\int_{\partial\Omega} e^{-\varepsilon|x-x_0|}\, dS \le \sup_{x\in\partial\Omega}\left\{e^{-\varepsilon/2|x-x_0|}\right\}\int_{\partial\Omega} e^{-\varepsilon/2|x-x_0|}\, dS \le \\ \le C_\varepsilon e^{-\varepsilon/2\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)}.$$

Сформулируем теперь аналоги предложений 1.2 и 1.3 для пространств функций, определенных на границе $\partial\Omega$.

Предложение 1.6. *Пусть $u \in L^p_\phi(\partial\Omega)$ для некоторой весовой функции ϕ экспоненциального роста μ. Тогда для любого $1 \le q \le \infty$ и любого $\varepsilon > \mu$ справедлива следующая оценка:*

$$\left(\int_\Omega \phi(x_0)^q \left(\int_{\partial\Omega} e^{-\varepsilon|x-x_0|}|u(x)|^p\, dS_x\right)^q dx_0\right)^{1/q} \le \\ \le C\int_{\partial\Omega}\phi(x)|u(x)|^p\, dS_x, \tag{1.27}$$

где константа C зависит только от ε, μ и от константы C_ϕ, определенной в (1.5) *(и не зависит от Ω и конкретного вида функции ϕ).*

Аналогично, если $u \in L^p_\phi(\Omega)$, то

$$\left(\int_{\partial\Omega} \phi(x_0)^q \left(\int_\Omega e^{-\varepsilon|x-x_0|}|u(x)|^p\,dx\right)^q dS_{x_0}\right)^{1/q} \le$$
$$\le C\int_\Omega \phi(x)|u(x)|^p\,dx. \quad (1.28)$$

Более того, оценки (1.27) *и* (1.28) *остаются справедливыми при замене $\int_\Omega$ и $\int_{\partial\Omega}$ на $\sup_\Omega$ и $\sup_{\partial\Omega}$ соответственно.*

Вывод оценок (1.27) и (1.28) совершенно аналогичен доказательству предложения 1.2.

Предложение 1.7. *Пусть Ω – регулярная область, $u \in W^{l,p}_{b,\phi}(\partial\Omega)$, где ϕ – весовая функция экспоненциального роста μ, и пусть $\varepsilon > \mu$. Тогда*

$$C_1\|u,\partial\Omega\|^p_{b,\phi,l,p} \le$$
$$\le \sup_{x_0\in\partial\Omega}\left\{\phi(x_0)\int_{x\in\partial\Omega} e^{-\varepsilon|x-x_0|}\|u,\partial\Omega\cap B^1_x\|^p_{l,p}\,dx\right\} \le$$
$$\le \sup_{x_0\in\Omega}\left\{\phi(x_0)\int_{x\in\partial\Omega} e^{-\varepsilon|x-x_0|}\|u,\partial\Omega\cap B^1_x\|^p_{l,p}\,dx\right\} \le C_2\|u,\partial\Omega\|^p_{b,\phi,l,p}, \quad (1.29)$$

где константы C_i зависят от константы K, участвующей в определении регулярной области, и от константы C_ϕ, введенной в неравенстве (1.5) *(и не зависят от конкретного вида Ω и ϕ).*

Вывод оценки (1.29) аналогичен доказательству предложения 1.3 и поэтому также не приводится.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим анизотропные соболевские пространства обобщенных функций, определенных на $\mathbb{R}\times\Omega$ или $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (и, соответственно, на $\mathbb{R}\times\partial\Omega$ или $\mathbb{R}_+\times\partial\Omega$), необходимых для исследования решений параболического уравнения (0.1) ($t\in\mathbb{R}$, $x\in\Omega$).

Определение 1.5. Обозначим через $W^{(l_1,l_2),q}([T,T+1]\times\Omega)$ классическое пространство Соболева-Слободетского, состоящее из функций, имеющих производные по t до порядка l_1 и по x до порядка l_2 включительно, принадлежащие пространству $L^q([T,T+1]\times\Omega)$ (см., например,

[21]). Напомним, что в случае целых (l_1, l_2) норма в этом пространстве определяется следующим образом:

$$\|u\|^q_{W^{(l_1,l_2),q}([T,T+1]\times\Omega)} := \|\partial_t^{l_1} u\|^q_{L^q_b([T,T+1]\times\Omega)} + \\ + \|D_x^{l_2} u\|^q_{L^q_b([T,T+1]\times\Omega)} + \|u\|^q_{L^q_b([T,T+1]\times\Omega)},$$

где символом $D_x^{l_2}$ обозначен набор всех частных производных по x порядка l_2, а в случае нецелых показателей может быть определена при помощи интерполяции аналогично (1.15) (см., например, [4] или [21]).

Введем теперь стандартным образом соответствующие весовые пространства $W_\phi^{(l_1,l_2),q}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$, $W_{b,\phi}^{(l_1,l_2),q}(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega)$, где $\phi = \phi(t, x)$ весовая функция экспоненциального роста μ в $\mathbb{R}^{n+1}$, и аналогичные им пространства функций, определенных на $\mathbb{R} \times \Omega$, $\mathbb{R} \times \partial\Omega$, или $\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$. Например, норма в пространстве $W_{b,\phi}^{(l_1,l_2),q}(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega)$ определяется по следующей формуле:

$$\|u\|_{W_{b,\phi}^{(l_1,l_2),q}(\mathbb{R}_+\times\partial\Omega)} := \sup_{\substack{T\in\mathbb{R}_+,\\ x_0\in\partial\Omega}} \left\{\phi(T,x_0)\|u\|_{W^{(l_1,l_2),q}([T,T+1]\times(\partial\Omega\cap B^1_{x_0}))}\right\},$$

а норма в пространстве $W_\phi^{(l_1,l_2),q}(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega)$ определяется по формуле

$$\|u\|^q_{W_\phi^{(l_1,l_2),q}(\mathbb{R}_+\times\partial\Omega)} := \\ = \int_{(T,s)\in\mathbb{R}_+\times\partial\Omega} \phi(T,s)\|u\|^q_{W^{(l_1,l_2),q}([T,T+1]\times(\partial\Omega\cap B^1_s))}\, dS\, dT.$$

§2 *Регулярность решений линейных уравнений в весовых пространствах.*

В этом параграфе мы сформулируем ряд результатов о регулярности решений линейных эллиптических и параболических уравнений в весовых соболевских пространствах, введенных в предыдущем параграфе, используя классические теоремы о регулярности этих решений в невесовых пространствах в ограниченных областях V_{x_0} (см. определение 1.1) и оценки, полученные в предложениях 1.1 – 1.7. Для простоты мы ограничимся рассмотрением лишь простейших эллиптических и параболических уравнений второго порядка, которые необходимы нам для исследования нелинейного уравнения (0.1), хотя аналогичные теоремы справедливы для существенно более широкого класса дифференциальных операторов и соответствующих им функциональных пространств (см., например, [7] и цитированную там литературу).

Мы начнем с описания следов функций из весовых пространств, введенных в §1, на границе $\partial\Omega$ регулярной области Ω.

Предложение 2.1. *Пусть Ω – регулярная область, ϕ – весовая функция экспоненциального роста μ, и пусть $l > 1/p$, $l - 1/p \notin \mathbb{N}$. Тогда существует линейный оператор продолжения $\Pi^{l,p} : W_\phi^{l-1/p,p}(\partial\Omega) \to W_\phi^{l,p}(\Omega)$, такой что*

$$(\Pi^{l,p}v_0)(x) \equiv 0, \quad \textit{если } \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > 2, \quad \Pi^{l,p}(v_0)\big|_{\partial\Omega} \equiv v_0, \tag{2.1}$$

и справедлива оценка

$$C_1\|\Pi^{l,p}(v\big|_{\partial\Omega})\|_{W_\phi^{l,p}(\Omega)} \le \|v\big|_{\partial\Omega}\|_{W_\phi^{l-1/p,p}(\partial\Omega)} \le C_2\|v\|_{W_\phi^{l,p}(\Omega)}, \tag{2.2}$$

где константы C_1, C_2 зависят от l, p, константы C_ϕ, введенной в (1.5), и константы K, участвующей в определении 1.1 регулярной области, но не зависит от конкретного вида Ω и ϕ. Таким образом, пространство следов функций из $W_\phi^{l,p}(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$ совпадает с $W_\phi^{l-1/p,p}(\partial\Omega)$. Аналогично, если $v \in W_{b,\phi}^{l,p}(\Omega)$, то

$$C_1\|\Pi^{l,p}(v\big|_{\partial\Omega})\|_{W_{b,\phi}^{l,p}(\Omega)} \le \|v\big|_{\partial\Omega}\|_{W_{b,\phi}^{l-1/p,p}(\partial\Omega)} \le C_2\|v\|_{W_{b,\phi}^{l,p}(\Omega)}, \tag{2.3}$$

и пространство следов функций из $W_{b,\phi}^{l,p}(\Omega)$ совпадает с $W_{b,\phi}^{l-1/p,p}(\partial\Omega)$.

Доказательство. Напомним, что регулярная область Ω предполагается удовлетворяющей условиям (1.1) и (1.2) с константой $R_0 = 2$. Введем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую что

$$\varphi(x) \equiv 1, \quad \text{если } |x| \le 1 \text{ и } \ \varphi(x) \equiv 0 \ \text{ при } |x| \ge 3/2. \tag{2.4}$$

Пусть также $\varphi_{x_0}(x) := \varphi(x - x_0)$. Определим разбиение единицы, соответствующее покрытию границы областями V_{x_0}, $x_0 \in \partial\Omega$, следующим образом:

$$\widehat{\varphi}_{x_0}(x) := \frac{\varphi_{x_0}(x)}{\int_{\partial\Omega}\varphi_{x_0}(x)\,dS_{x_0}}.$$

Тогда, как нетрудно проверить (см. предложение 1.5),

$$\|\widehat{\varphi}_{x_0}(x)\big|_{\partial\Omega}\|_{W_b^{l,p}(\partial\Omega)} \le C_{l,p}, \quad \int_{\partial\Omega} \widehat{\varphi}_{x_0}(x)\, dS_{x_0} \equiv 1 \tag{2.5}$$

и $\operatorname{supp} \widehat{\varphi}_{x_0}(x)\big|_{\partial\Omega} \subset \partial\Omega \cap B_{x_0}^{3/2}$.

Напомним, что так как V_{x_0} гладкая область, то существует оператор продолжения $\Pi_{x_0} : W^{l-1/p,p}(\partial V_{x_0}) \to W^{l,p}(V_{x_0})$, $\Pi_{x_0}(v_0)\big|_{\partial V_{x_0}} \equiv v_0$ (см., например, [4] или [30]). Кроме того, без ограничения общности можно считать что

$$\operatorname{supp} \Pi_{x_0}(v_0) \subset \Omega \cap B_{x_0}^2, \quad \text{если } \operatorname{supp} v_0 \subset \partial\Omega \cap B_{x_0}^{3/2}. \tag{2.6}$$

Более того, так как области V_{x_0} удовлетворяют условию (1.2) равномерно по $x_0 \in \Omega$ (с достаточно большой константой $N = N(l)$), то нормы операторов продолжения Π_{x_0} также ограничены равномерно по $x_0 \in \partial\Omega$.

Определим теперь оператор продолжения $\Pi^{l,p}$ по формуле

$$\Pi^{l,p}(v_0)(x) := \int_{\partial\Omega} \Pi_{x_0}(\widehat{\varphi}_{x_0} v_0)(x)\, dS_{x_0}, \quad v_0 \in W_\phi^{l-1/p,p}(\partial\Omega). \tag{2.7}$$

Действительно, из (2.5) и определения операторов Π_{x_0} следует, что $\Pi^{l,p}(v_0)\big|_{\partial\Omega} \equiv v_0$, а также, что $\Pi^{l,p}$ удовлетворяет свойству (2.1). Остается проверить выполнение оценки (2.2). Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \|\Pi^{l,p}(v_0), B_x^1 \cap \Omega\|_{l,p}^p \le C_0 \int_{\partial\Omega} \|\Pi_{x_0}(\widehat{\varphi}_{x_0} v_0), B_x^1 \cap \Omega\|_{l,p}^p\, dS_{x_0} \le \\ \le C_0 \int_{\partial\Omega} \chi_{B_{x_0}^3}(x) \|\Pi_{x_0}(\widehat{\varphi}_{x_0} v_0), B_{x_0}^2 \cap \Omega\|_{l,p}^p\, dS_{x_0} \le \\ \le C \int_{\partial\Omega} e^{-2\mu|x_0 - x|} \|\widehat{\varphi}_{x_0} v_0, \partial\Omega \cap B_{x_0}^{3/2}\|_{l-1/p,p}^p\, dS_{x_0} \le \\ \le C_1 \int_{\partial\Omega} e^{-2\mu|x_0 - x|} \|v_0, \partial\Omega \cap B_{x_0}^1\|_{l-1/p,p}^p\, dS_{x_0}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где константа C_1 не зависит от $x \in \Omega$ (здесь мы в неявной форме использовали тот факт, что нормы операторов продолжения Π_{x_0} ограничены равномерно по $x_0 \in \partial\Omega$, а также оценку (2.5) для срезающих функций $\widehat{\varphi}_{x_0}$ и эквивалентность норм вида (1.14) при различных R).

Умножив неравенство (2.8) на $\phi(x)$, проинтегрировав по $x \in \Omega$ и использовав оценку (1.27) с $q = 1$, мы получим левую часть оценки (2.2). Аналогично, умножив (2.8) на $\phi(x)$, взяв верхнюю грань по $x \in \Omega$ и использовав неравенство (1.27) с $q = \infty$, мы получим левую часть оценки (2.3). Таким образом, оператор продолжения $\Pi^{l,p}$, удовлетворяющий всем условиям предложения 2.1, построен.

Доказательство правых оценок (2.2) и (2.3) аналогично, но существенно проще. Действительно, пусть $v \in W^{l,p}_{\phi}(\Omega)$. Тогда, согласно классической теореме о следах (см., например, [30]), примененной к гладкой области V_{x_0},

$$\|v\big|_{\partial\Omega}, \partial\Omega \cap B^1_{x_0}\|^p_{l-1/p,p} \le C\|v, B^3_{x_0} \cap \Omega\|^p_{l,p} \le$$
$$\le C_1 \int_{\Omega} e^{-2\mu|x-x_0|}\|v, \Omega \cap B^3_x\|^p_{l,p}\,dx, \tag{2.9}$$

где константа C не зависит от $x_0 \in \partial\Omega$.

Умножив неравенство (2.9) на $\phi(x)$, проинтегрировав по $x \in \partial\Omega$, и использовав неравенство (1.28) с $q = 1$ и эквивалентность норм (1.14) при разных R, мы получим левую часть оценки (2.2). Для доказательства левой части оценки (2.3) достаточно умножить (2.9) на $\phi(x)$ и взять верхнюю грань по $x \in \partial\Omega$, использовав после этого оценку (1.28) с $q = \infty$. Предложение 2.1 доказано.

Сформулируем теперь аналог предложения 2.1 для анизотропных соболевских пространств $W^{(1,2),p}_{\phi}(\mathbb{R} \times \Omega)$, соответствующих параболическому уравнению.

Предложение 2.2. *Пусть Ω – регулярная область, $\phi = \phi(t, x)$ – весовая функция экспоненциального роста μ в пространстве $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и пусть $1 < p < \infty$. Тогда существует линейный оператор продолжения $\Pi^p : W^{(1-1/(2p),2-1/p),p}_{\phi}(\mathbb{R} \times \partial\Omega) \to W^{(1,2),p}_{\phi}(\mathbb{R} \times \Omega)$, такой что*

$$(\Pi^p v_0)(t, x) \equiv 0, \quad \text{если } \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 2, \quad \Pi^p(v_0)\big|_{\partial\Omega} \equiv v_0, \tag{2.10}$$

и справедлива оценка

$$C_1\|\Pi^p(v\big|_{\partial\Omega})\|_{W^{(1,2),p}_{\phi}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le$$
$$\le \|v\big|_{\partial\Omega}\|_{W^{(1-1/(2p),2-1/p),p}_{\phi}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)} \le C_2\|v\|_{W^{(1,2),p}_{\phi}(\mathbb{R}\times\Omega)}, \tag{2.11}$$

где константы C_1, C_2 зависят от p, константы C_ϕ, введенной в (1.5), и константы K, участвующей в определении 1.1 регулярной области, но не зависит от конкретного вида Ω и ϕ. Таким образом, пространство следов функций из $W_\phi^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)$ на границе $\partial\Omega$ совпадает с $W_\phi^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)$. Аналогично, если $v\in W_{b,\phi}^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)$, то

$$
\begin{aligned}
C_1\|\Pi^p(v\big|_{\partial\Omega})\|_{W_{b,\phi}^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le \\
\le \|v\big|_{\partial\Omega}\|_{W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)} \le C_2\|v\|_{W_{b,\phi}^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

и пространство следов функций из $W_{b,\phi}^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)$ совпадает с пространством $W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)$.

Доказательство этого предложения совершенно аналогично предложению 2.1 и поэтому не приводится.

Следующее предложение описывает пространство следов функций из $W_\phi^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)$ на гиперплоскости $t=T$.

Предложение 2.3. *Пусть Ω – регулярная область, $\phi(t,x)$ – весовая функция экспоненциального роста μ в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\phi_T(x):=\phi(T,x)$, и пусть $1<p<\infty$. Тогда для любой функции $v\in W_\phi^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)$ и любого $T\in\mathbb{R}$ справедлива оценка*

$$
\|v(T)\|_{W_{\phi_T}^{2(1-1/p),p}(\Omega)} \le C\|v\|_{W_\phi^{(1,2),p}([T,T+1]\times\Omega)},
\tag{2.13}
$$

где константа C зависит от p, константы C_ϕ, введенной в (1.5), и константы K, участвующей в определении 1.1 регулярной области, но не зависит от $T\in\mathbb{R}$ и конкретного вида Ω и ϕ. Более того, аналогичная оценка справедлива и для пространств $W_{b,\phi}^{(1,2),p}$.

Действительно, оценка (2.13) выводится из аналогичной оценки для невесовых пространств в ограниченной области V_{x_0} (см., например, [20-21]) так же, как и в предложении 2.1.

Рассмотрим теперь следующее эллиптическое уравнение в неограниченной области Ω:

$$
a\Delta_x u+\lambda_0 u=h(x),\quad u=(u^1,\cdots,u^k),\quad u\big|_{\partial\Omega}=u^0,
\tag{2.14}
$$

где a, постоянная матрица с положительной симметрической частью $a+a^*>0$, а $\lambda_0>0$ – положительная константа.

Предложение 2.4. *Пусть Ω – регулярная область, ϕ – весовая функция экспоненциального роста μ, и пусть показатель $\mu < \mu_0(a, \lambda_0)$ достаточно мал. Предположим также, что $u^0 \in W_\phi^{2-1/p,p}(\partial\Omega)$ и $h \in L_\phi^p(\Omega)$ для некоторого p, $2 \le p < \infty$. Тогда уравнение (2.14) имеет единственное решение, и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_\phi^{2,p}(\Omega)} \le C\left(\|h\|_{L_\phi^p(\Omega)} + \|u^0\|_{W_\phi^{2-1/p,p}(\partial\Omega)}\right), \tag{2.15}$$

где константа C зависит от константы K, введенной в определении регулярной области и от константы C_ϕ определенной в (1.5) и не зависит от конкретного вида области Ω и весовой функции ϕ. Более того, аналогичная оценка справедлива и для случая весовых пространств $W_{b,\phi}^{2,p}(\Omega)$.

Доказательство. Согласно предложению 2.1, существует продолжение $v(x)$ функции u^0 с границы $\partial\Omega$ внутрь области Ω, такое что

$$\|v\|_{W_\phi^{2,p}(\Omega)} \le C_1\|u^0\|_{W_\phi^{2-1/p,p}(\partial\Omega)}.$$

Поэтому достаточно доказать оценку (2.15) только для случая $u^0 \equiv 0$.

Умножим уравнение (2.14) на $u\phi_{\varepsilon,x_0}(x)$, где ϕ_{ε,x_0} определена в (1.9), $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число, а $x_0 \in \Omega$ произвольно. Тогда, интегрируя по частям и учитывая, что $u^0 \equiv 0$ и $a + a^* > 0$, получим

$$\mathrm{C}\left(|\nabla_x u|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + \lambda_0\left(|u|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + 2\left(a\nabla_x u.u, \nabla_x\phi_{\varepsilon,x_0}\right) \le -\left(h.u, \phi_{\varepsilon,x_0}\right).$$

Здесь и далее $(u, v) := \int_\Omega u(x).v(x)\,dx$ – скалярное произведение в пространстве $L^2(\Omega)$. Применив теперь неравенство Гельдера и очевидную оценку

$$|\nabla_x\phi_{\varepsilon,x_0}(x)| \le \varepsilon\phi_{\varepsilon,x_0}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.16}$$

получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\|u\|^2_{W^{1,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le C_2\|h\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}, \tag{2.17}$$

где константа C_2 не зависит от x_0. Для вывода оценки (2.15) из (2.17) мы используем классическую теорему о регулярности решений уравнений Лапласа в гладкой ограниченной области V_{x_0}. Действительно, пусть $\varphi_{x_0}(x)$ срезающая функция, определенная в доказательстве предложения 2.1 и пусть $u_{x_0}(x) := u(x)\varphi_{x_0}(x)$. Тогда,

$$a\Delta_x u_{x_0} - \lambda_0 u_{x_0} = 2a\nabla_x\varphi_{x_0}\nabla_x u + a\Delta_x\varphi_{x_0}u + \varphi_{x_0}h, \quad u_{x_0}\big|_{\partial V_{x_0}} = 0. \quad (2.18)$$

Таким образом (см. [30]),

$$\|u, \Omega\cap B^1_{x_0}\|^p_{2,p} \le \|u_{x_0}, V_{x_0}\|^p_{2,p} \le C\left(\|u, V_{x_0}\|^p_{1,p} + \|h, V_{x_0}\|^p_{0,p}\right). \quad (2.19)$$

Более того, из условия (1.2) на области V_{x_0} следует, что константа C в неравенстве (2.19) не зависит от $x_0 \in \Omega$.

Для оценки правой части (2.19) воспользуемся интерполяционным неравенством (см. [30])

$$\|u, V_{x_0}\|^p_{1,p} \le C\|u, V_{x_0}\|^{p(1-\theta)}_{1,2}\|u, V_{x_0}\|^{\theta p}_{2,p} \le \nu\|u, V_{x_0}\|^p_{2,p} + C_\nu\|u, V_{x_0}\|^p_{1,2},$$

где показатель $\theta = \theta(n,p)$ удовлетворяет условию $0 < \theta < 1$, $\nu > 0$ – произвольное положительное число, а константа C_ν не зависит от $x_0 \in \Omega$. Подставив эту оценку в (2.19), получим

$$\|u, \Omega\cap B^1_{x_0}\|^p_{2,p} \le \nu\|u, \Omega\cap B^3_{x_0}\|^p_{2,p} + C_\nu\left(\|u, V_{x_0}\|^p_{1,2} + \|h, V_{x_0}\|^p_{0,p}\right). \quad (2.20)$$

Умножив (2.20) на $\phi_{\varepsilon_1,y}(x_0)$, проинтегрировав по $x_0 \in \Omega$, и использовав оценку (2.17) и тот факт, что нормы (1.14) эквивалентны при разных R, получим

$$\|u\|^p_{W^{2,p}_{\phi_{\varepsilon_1,y}}(\Omega)} \le C\nu\|u\|^p_{W^{2,p}_{\phi_{\varepsilon_1,y}}(\Omega)} + C_\nu\|h\|^p_{L^p_{\phi_{\varepsilon_1,y}}(\Omega)} +$$
$$+ C_\nu\int_\Omega e^{-\varepsilon_1|x_0-y|}\left(\int_\Omega e^{-\varepsilon|x-x_0|}\|h, B^1_x\|^2_{0,p}\,dx\right)^{p/2}dx_0.$$

Выбирая теперь $\nu > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ достаточно малыми, и используя оценку (1.22), мы преобразуем последнее неравенство к виду

$$\|u\|^p_{W^{2,p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le C\|h\|_{L^p_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}, \quad (2.21)$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и некоторой константы C, не зависящей от x_0.

Умножив (2.21) на $\phi(x_0)$, проинтегрировав по $x_0 \in \Omega$, и воспользовавшись оценкой (1.17), предполагая, что $\mu < \varepsilon$, мы получим оценку (2.15) (для случая $u^0 \equiv 0$). Для получения аналогичной оценки для пространств $W^{2,p}_{b,\phi}$ достаточно, умножив (2.21) на $\phi(x_0)$, взять верхнюю грань по $x_0 \in \Omega$. Предложение 2.4 доказано.

Перейдем теперь к изучению параболического уравнения

$$\partial_t u - a\Delta_x u + \lambda_0 u = h(t), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = u^0, \tag{2.22}$$

соответствующего (2.14).

Предложение 2.5. *Пусть Ω – регулярная область, ϕ – весовая функция экспоненциального роста μ в $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть показатель $\mu < \mu_0(a,\lambda_0)$ достаточно мал. Предположим, что $u^0 \in W_\phi^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)$ и $h \in L^p_\phi(\mathbb{R} \times \Omega)$ для некоторого p, $2 \le p < \infty$. Тогда уравнение (2.22) имеет единственное решение, и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_\phi^{(1,2),p}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C\left(\|h\|_{L^p_\phi(\mathbb{R}\times\Omega)} + \|u^0\|_{W_\phi^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)}\right), \tag{2.23}$$

где константа C зависит от константы K, введенной в определении регулярной области и от константы C_ϕ определенной в (1.5) и не зависит от конкретного вида области Ω и весовой функции ϕ. Более того, аналогичная оценка справедлива и для случая весовых пространств $W^{(1,2),p}_{b,\phi}(\mathbb{R} \times \Omega)$.

Доказательство этого предложения совершенно аналогично выводу оценки (2.15) и поэтому не приводится.

Рассмотрим теперь параболическое уравнение

$$\partial_t u - a\Delta_x u + \lambda_0 u = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ u\big|_{t=0} = u_0 \tag{2.24}$$

в полуцилиндре $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Предложение 2.6. *Пусть Ω – регулярная область, ϕ – весовая функция экспоненциального роста $\mu > 0$ в $\mathbb{R}^n$, $\mu < \mu_0(a,\lambda_0)$ и $2 \le p \le \infty$. Тогда для любого $u_0 \in W_\phi^{2(1-1/p),p}(\Omega)$, такого что $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$, уравнение*

(2.24) *имеет единственное решение, и для любого* $T \geq 0$ *справедлива оценка*

$$\|u(T)\|_{W_\phi^{2(1-1/p),p}(\Omega)} + \|u\|_{W_\phi^{(1,2),p}([T,T+1]\times\Omega)} \leq \\ \leq Ce^{-\lambda_0 T/2}\|u_0\|_{W_\phi^{2(1-1/p),p}(\Omega)}, \quad (2.25)$$

где константа C *зависит от константы* K, *введенной в определении регулярной области, и от константы* C_ϕ, *определенной в* (1.5), *и не зависит от* T, *конкретного вида области* Ω *и весовой функции* ϕ.

Кроме того, если $u_0 \in W_\phi^{2,p}(\Omega)$, *то*

$$\|u(t)\|_{W_\phi^{2,p}(\Omega)} \leq Ce^{-\lambda_0 T/2}\|u(0)\|_{W_\phi^{2,p}(\Omega)}. \quad (2.26)$$

Более того, аналогичные оценки справедливы и для пространств $W_{b,\phi}^{2,p}$.

Доказательство. Действительно, умножая уравнение (2.24) на $u\phi_{\varepsilon,x_0}$, интегрируя по Ω, и рассуждая так же как и в предложении 2.3, получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\partial_t\left(|u(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + 3/2\lambda_0\left(|u(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) \leq 0. \quad (2.27)$$

Применив неравенство Гронуолла к соотношению (2.27), получим аналог оценки (2.17) для параболического уравнения

$$\|u(t)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \leq Ce^{-3\lambda_0 t/2}\|u_0\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}. \quad (2.28)$$

Пусть $\varphi_{x_0}(x)$ –срезающая функция, такая же, как и в доказательстве предложения 2.1, и пусть $u_{x_0}(t) := \varphi_{x_0}u(t)$. Тогда эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\partial_t u_{x_0} - a\Delta_x u_{x_0} + \lambda_0 u_{x_0} = h_{x_0}(t) := 2a\nabla_x\varphi_{x_0}\nabla_x u + \\ + a\Delta_x\varphi_{x_0}u(t),\ u_{x_0}\big|_{\partial\Omega} = 0,\ u_{x_0}\big|_{t=0} = \varphi_{x_0}u_0. \quad (2.29)$$

Применяя классическую теорему о регулярности решений параболических уравнений в гладкой ограниченной области V_{x_0} (см., например, [21]) к уравнению (2.29), получим

$$\|u\|^p_{W^{(1,2),p}([T,T+1]\times\Omega\cap B^1_{x_0})} \leq Ce^{-p\lambda_0 T}\|u_{x_0}(0), V_{x_0}\|^p_{2(1-1/p),p} + \\ + C\int_0^{T+1} e^{-p\lambda_0(T+1-t)}\|u(t), V_{x_0}\|^p_{1,p}\,dt, \quad (2.30)$$

где C не зависит от $x_0 \in \Omega$. Более того, согласно интерполяционному неравенству

$$\|u, V_{x_0}\|^p_{1,p} \le C\|u, V_{x_0}\|^{p\theta}_{0,2}\|u, V_{x_0}\|^{p(1-\theta)}_{2(1-1/p),p} \le \\ \le \nu\|u, V_{x_0}\|^p_{2(1-1/p),p} + C_\nu\|u, V_{x_0}\|^p_{0,2}, \quad (2.31)$$

где $\theta = \theta(p, n)$, $0 < \theta < 1$, а константа $\nu > 0$ может быть выбрана сколь угодно малой. Умножив соотношение (2.30) на $\phi_{\varepsilon,x_0}(x) := e^{-\varepsilon|x-x_0|}$, проинтегрировав по $x \in \Omega$, и воспользовавшись оценками (2.28) и (2.31), получим

$$\|u\|^p_{W^{(1,2),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}([T,T+1]\times\Omega)} \le C_\nu e^{-3/4\lambda_0 pT}\|u_0\|^p_{W^{2(1-1/p),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + \\ + \nu\int_0^{T+1} e^{-p\lambda_0(T+1-t)}\|u(t)\|^p_{W^{2(1-1/p),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\,dt. \quad (2.32)$$

Применяя теперь теорему о следах (2.13) и неравенство Гронуолла к соотношению (2.32) с достаточно малым $\nu > 0$, получим

$$\|u(t)\|^p_{W^{2(1-1/p),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le Ce^{-\lambda_0 pt/2}\|u_0\|^p_{W^{2(1-1/p),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}. \quad (2.33)$$

Подставив (2.33) в (2.32), окончательно получим

$$\|u(T)\|^p_{W^{2(1-1/p),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + \|u\|^p_{W^{(1,2),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}([T,T+1]\times\Omega)} \le \\ \le Ce^{-\lambda_0 pT/2}\|u_0\|^p_{W^{2(1-1/p),p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)},$$

где константа C не зависит от $x_0 \in \Omega$. Неравенство (2.25) немедленно следует из этой оценки (см. доказательство предложения 2.4).

Таким образом, остается проверить оценку (2.26). Для этого разложим функцию $u_{x_0}(t)$ в сумму двух функций $u_{x_0}(t) := u^1_{x_0}(t) + u^2_{x_0}(t)$, где $u^1_{x_0}(t)$ решение уравнения (2.29) с $h_{x_0} \equiv 0$, а $u^2_{x_0}(t)$ – решение этого уравнения с нулевыми начальными условиями (и ненулевой правой частью). Тогда, так как оператор $a\Delta_x - \lambda_0$ является секториальным в $W^{2,p}(V_{x_0}) \cap W^{1,p}_0(V_{x_0})$ (см., например, [30]), то функция $u^1_{x_0} \in C(\mathbb{R}_+, W^{2,p}(V_{x_0}))$, и справедлива оценка

$$\|u^1_{x_0}(t), V_{x_0}\|^p_{2,p} \le Ce^{-\lambda_0 p}\|u_{x_0}(0), V_{x_0}\|^p_{2,p}, \quad (2.34)$$

а функция $u^2_{x_0}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u^2_{x_0}(T)\|^p_{2+\alpha-\nu,p} \le \mathrm{C}_\nu \sup_{t\in[0,T]} \{e^{-\lambda_0 p(T-t)}\|h_{x_0}(t), V_{x_0}\|^p_{\alpha,p}\}, \tag{2.35}$$

где константы C, а C_ν не зависят от x_0, $\alpha > 0$ и $\nu > 0$ – сколь угодно малое положительное число. Из оценок (2.35) (с $\alpha = \nu = 1-2/p$), (2.34) и (2.33) следует, что

$$\|u(T), \Omega \cap B^1_{x_0}\|^p_{2,p} \le Ce^{-\lambda_0 T/2}\|u_0\|^p_{W^{2,p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}. \tag{2.36}$$

Умножив (2.36) на $\phi_{\varepsilon_1,y}(x_0)$, где $y \in \Omega$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon$, и воспользовавшись формулой (1.22), получим

$$\|u(T)\|^p_{W^{2,p}_{\phi_{\varepsilon_1,y}}(\Omega)} \le Ce^{-\lambda_0 T/2}\|u_0\|^p_{W^{2,p}_{\phi_{\varepsilon_1,y}}(\Omega)}, \tag{2.37}$$

где константа C не зависит от $y \in \Omega$. Предложение 2.6 доказано.

Замечание 2.1. Из оценки (2.25) следует, что решение $u(t)$ задачи (2.24) принадлежит пространству $L^\infty(\mathbb{R}_+, W^{2,p}_\phi(\Omega)$ $(L^\infty(\mathbb{R}_+, W^{2,p}_{b,\phi}(\Omega))$ если начальное условие $u_0 \in W^{2,p}_\phi(\Omega)$ (соответственно, $u_0 \in W^{2,p}_{b,\phi}(\Omega)$), а ϕ – произвольная весовая функция достаточно малого экспоненциального роста. Более того, в случае пространств $W^{2,p}_\phi$ нетрудно показать, используя непрерывность функций $u_{x_0}(t)$ $(u_{x_0} \in C(\mathbb{R}_+, W^{2,p}(V_{x_0}))$, что решение

$$u \in C([0,T], W^{2,p}_\phi(\Omega)) \tag{2.38}$$

(см., например, [82]). Заметим, однако, что аналог утверждения (2.38) не имеет места для случая пространств $W^{2,p}_{b,\phi}(\Omega)$ в регулярной неограниченной области Ω, то есть существуют функции $u_0 \in W^{2,p}_{b,\phi}(\Omega)$, такие что

$$u \notin C([0,T], W^{2,p}_\phi(\Omega)).$$

В частности, уравнение (2.24) *не порождает* C_0-полугруппу в пространстве $W^{2,p}_b(\Omega)$, если область Ω не ограничена. Это связано с тем, что $W^{2,p}_b(\Omega)$ не плотно в $L^p_b(\Omega)$, если Ω не ограничена.

Предложение 2.7. *Пусть Ω – регулярная область, ϕ – весовая функция достаточно малого экспоненциального роста, и пусть правая часть $h(t)$ уравнения*

$$\partial_t u - a\Delta_x u + \lambda_0 u = h(t), \quad u\big|_{t=0} = u\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.39}$$

принадлежит пространству $h \in L^\infty(\mathbb{R}_+, W_\phi^{\alpha,p}(\Omega))$ для некоторого $\alpha \in [0, 1/p)$. Тогда, для любого $0 < \delta < 1$, справедлива оценка

$$\|u(T)\|_{W_\phi^{2+\alpha-\delta,p}(\Omega)} \le C_\delta \sup\{e^{-\lambda_0(T-t)/2}\|h(t)\|_{W_\phi^{\alpha,p}(\Omega)}\}, \tag{2.40}$$

где константа C_δ зависит от константы K, введенной в определении регулярной области, и от константы C_ϕ, определенной в (1.5), и не зависит от T, конкретного вида области Ω и весовой функции ϕ. Более того, аналогичная оценка справедлива и для случая пространств $W_{b,\phi}^{2+\alpha,p}$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что аналогично (2.28), доказывается следующая оценка

$$\|u(T)\|^2_{L^2_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le C\int_0^T e^{-\lambda_0(T-t)}\|h(t)\|^2_{L^2_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\,dt. \tag{2.41}$$

Введем, как и ранее, функции $u_{x_0}(t)$, удовлетворяющие уравнениям (2.29) (с дополнительным слагаемым $\varphi_{x_0}h$ в правой части и нулевыми начальными условиями), и применим к этим уравнениям теорему о регулярности решений в следующем виде:

$$\begin{aligned}\|u_{x_0}(T), V_{x_0}\|^p_{2+\alpha-\delta,p} &\le \\ \le C_\delta\int_0^T e^{-\lambda_0 p(T-t)}|T-t|^{\nu-1}&\left(\|u(t), V_{x_0}\|^p_{1+\alpha,p} + \|h(t), V_{x_0}\|^p_{\alpha,p}\right)dt,\end{aligned} \tag{2.42}$$

где константы C_δ и $\nu = \nu(n,p) > 0$ не зависят от $x_0 \in \Omega$ (см. [21]). Как и ранее первое подынтегральное слагаемое в правой части (2.42) оценивается с помощью интерполяционного неравенства

$$\|u(t), V_{x_0}\|^p_{1+\alpha,p} \le \nu\|u(t), V_{x_0}\|^p_{2+\alpha-\delta,p} + C_\nu\|u(t), V_{x_0}\|^p_{0,2}. \tag{2.43}$$

Умножив (2.42) на $\phi(x_0)$, проинтегрировав по $x_0 \in \Omega$, и использовав (2.43), (2.41) и очевидную оценку,

$$\int_0^T e^{-\lambda_0 p(T-t)/2}|T-t|^{\nu-1}\,dt \le C,$$

после элементарных преобразований получим оценку

$$\|u(T)\|^p_{W^{2+\alpha-\delta,p}_\phi(\Omega)} \le C_\nu \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 p(T-t)/2}\|h(t)\|^p_{W^{\alpha,p}_\phi(\Omega)}\}+$$
$$+\nu \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 p(T-t)/2}\|u(t)\|^p_{W^{2+\alpha-\delta,p}_\phi(\Omega)}\}. \qquad (2.44)$$

Выбрав в (2.44) $\nu = 1/2$, умножив на на $e^{-\lambda_0 p(T-s)}$ и взяв верхнюю грань по $T \in [0,s]$ от обеих частей неравенства (2.44), и использовав очевидное соотношение

$$\sup_{T\in[0,s]} e^{-\lambda_0 p|T-s|/2}e^{-\lambda_0 p|T-t|/2} = e^{-\lambda_0 p|s-t|},$$

получим

$$\sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 p(T-t)/2}\|u(t)\|^p_{W^{2+\alpha-\delta,p}_\phi(\Omega)}\} \le$$
$$\le C \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 p(T-t)/2}\|h(t)\|^p_{W^{\alpha,p}_\phi(\Omega)}\}$$

Подставив эту оценку в (2.44), окончательно получим

$$\|u(T)\|^p_{W^{2+\alpha-\delta,p}_\phi(\Omega)} \le C \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 p(T-t)/2}\|h(t)\|^p_{W^{\alpha,p}_\phi(\Omega)}\}. \qquad (2.45)$$

Оценка (2.40) доказана. Для доказательства аналогичной оценки для пространств $W^{2+\alpha,p}_{b,\phi}$ заметим, что, в частности, оценка (2.45) справедлива для весов ϕ_{ε,x_0} с константой C, не зависящей от $x_0 \in \Omega$. Умножив это соотношение на $\phi(x_0)$ и взяв верхнюю грань по $x_0 \in \Omega$ и использовав оценку (1.19), получим

$$\|u(T)\|^p_{W^{2+\alpha-\delta,p}_{b,\phi}(\Omega)} \le C \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 p(T-t)/2}\|h(t)\|^p_{W^{\alpha,p}_{b,\phi}(\Omega)}\}. \qquad (2.46)$$

Предложение 2.7 доказано.

Рассмотрим в завершение этого параграфа параболическое уравнение в полуцилиндре с неоднородными граничными условиями:

$$\partial_t u - a\Delta_x u + \lambda_0 u = 0,\ u\big|_{t=0} = u_0,\quad u\big|_{\partial\Omega} = u^0. \qquad (2.47)$$

Предложение 2.8. *Пусть Ω – регулярная область и пусть $\phi = \phi(x)$ – весовая функция достаточно малого экспоненциального роста в $\mathbb{R}^n$. Предположим также, что*

$$u^0 \in W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega), \quad u_0 \in W_{b,\phi}^{2(1-1/p),p}(\Omega)$$

и выполнено условие согласования

$$u^0\big|_{t=0} = u_0\big|_{\partial\Omega}. \tag{2.48}$$

Тогда решение $u(t)$, $t \geq 0$ задачи (2.47) удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} &\|u\|^p_{W_{b,\phi}^{(1,2),p}([T,T+1]\times\Omega)} + \|u(T)\|^p_{W_{b,\phi}^{2(1-1/p),p}(\Omega)} \leq \\ &\leq Ce^{-\lambda_0 pT/2}\|u_0\|^p_{W_{b,\phi}^{2(1-1/p),p}(\Omega)} + C\|u^0\|^p_{W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}_+\times\partial\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

где константа C зависит от константы K, введенной в определении регулярной области и от константы C_ϕ определенной в (1.5) и не зависит от T, конкретного вида области Ω и весовой функции ϕ.

Доказательство. Определим функцию

$$\widehat{u}^0(t) := \begin{cases} u^0(t) & \text{если } t \geq 0, \\ 3u^0(-t) - 2u^0(-2t) & \text{если } t \leq 0. \end{cases} \tag{2.50}$$

Заметим, что $\widehat{u}^0(0+) = \widehat{u}^0(0-)$ и $\partial_t\widehat{u}^0(0+) = \partial_t\widehat{u}^0(0-)$, поэтому $\widehat{u}^0 \in W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)$ и

$$\|\widehat{u}^0\|_{W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)} \leq C\|u^0\|_{W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}_+\times\partial\Omega)}. \tag{2.51}$$

Пусть теперь $\widehat{u}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, решение задачи (2.22) с граничным условием $\widehat{u}^0(t)$. Тогда, согласно предложению 2.5,

$$\begin{aligned} &\|\widehat{u}\|_{W_{b,\phi}^{(1,2),p}([T,T+1]\times\Omega)} + \|\widehat{u}(T)\|_{W_{b,\phi}^{2(1-1/p),p}(\Omega)} \leq \\ &\qquad\qquad \leq C\|u^0\|_{W_{b,\phi}^{(1-1/(2p),2-1/p),p}(\mathbb{R}_+\times\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Рассмотрим функцию $w(t) := u(t) - \widehat{u}(t)$, которая, очевидно удовлетворяет уравнению (2.24), причем, благодаря условию согласования (2.48), $w(0)\big|_{\partial\Omega} = 0$. Оценка (2.49) следует теперь из (2.52) и (2.25). Предложение 2.8 доказано.

§3 Нелинейное уравнение. Априорные оценки и существование решений.

Этот параграф посвящен исследованию следующей нелинейной системы реакции-диффузии в регулярной неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_t u = a\Delta_x u - (L, \nabla_x)u - \lambda_0 u - f(u) + g, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = u^0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $u = (u^1, \cdots, u^k)$ – неизвестная векторная функция, $\lambda_0 > 0$ – положительное число, $f(u) = (f_1(u), \cdots, f_k(u))$ и $g = (g_1(x), \cdots, g_k(x))$ – заданные функции, a – заданная постоянная матрица диффузии, удовлетворяющая условию

$$a + a^* > 0, \tag{3.2}$$

$L := \vec{L}(x) \subset \mathbb{R}^n$ – заданное векторное поле в $\mathbb{R}^n$, такое что

$$L \in W_b^{1,\infty}(\Omega), \quad \|\operatorname{div}(L)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \lambda_0/2, \tag{3.3}$$

Δ_x – оператор Лапласа по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, а транспортный член $(L, \nabla_x)u$ определяется формулой

$$(L, \nabla_x)u := \sum_{i=1}^n L_i(x)\partial_{x_i} u. \tag{3.4}$$

Напомним, что нелинейная функция f предполагается удовлетворяющей следующим условиям регулярности:

$$\begin{cases} 1.\ f \in C^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k), \\ 2.\ f(u).u \ge -C, \\ 3.\ f'(u) \ge -K \end{cases} \tag{3.5}$$

(здесь и далее $u.v$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$) и, дополнительно, следующим ограничениям на рост:

$$1.\ |f(u)| \le C(1 + |u|^p), \quad 2.\ |f'(u)|^{p/(p-1)} \le C(|f(u)| + |u| + 1), \tag{3.6}$$

где показатель $p > 0$ удовлетворяет неравенству $p < 1 + \frac{4}{n-4}$ при $n > 4$, а в случае $n \le 4$ показатель p может быть произвольно большим.

Предполагается также, что начальное условие u_0 принадлежит фазовому пространству $\Phi_b = \Phi_b(\Omega)$:

$$u_0 \in \Phi_b := W_b^{2,q}(\Omega), \tag{3.7}$$

для некоторого фиксированного показателя $q > n+1$, внешняя сила принадлежит пространству

$$g \in L_b^q(\Omega), \tag{3.8}$$

а краевое условие u^0 выбирается из пространства

$$u^0 \in \Psi_b(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega) := \{u^0, \partial_t u^0 \in W_b^{(1-1/(2q),2-1/q),q}(\mathbb{R}_+ \times \partial\Omega)\} \tag{3.9}$$

(которое есть пространство следов на $\partial\Omega$ функций из пространства $\{u, \partial_t u \in W_b^{(1,2),q}(\mathbb{R}_+ \times \Omega)\}$, см. предложение 2.2), и удовлетворяет условию согласования

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = u^0\big|_{t=0}. \tag{3.10}$$

Под решением задачи (3.1) понимается функция

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, W_b^{2,q}(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}_+, L_b^q(\Omega)), \tag{3.11}$$

удовлетворяющая (3.1) в смысле обобщенных функций.

Замечание 3.1. Так как показатель $q > n+1$, то, согласно теореме вложения $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$, и, следовательно, нелинейное слагаемое $f(u)$ в (3.1) корректно определено и принадлежит L^∞. Более того, из уравнения (3.1) следует, что для любого решения $u(t)$

$$\partial_t u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L_b^q(\Omega)),$$

и, как нетрудно показать,

$$u \in C([0,T], W^{2,q}_{e^{-\varepsilon|x|}}(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^q_{e^{-\varepsilon|x|}}(\Omega)), \tag{3.12}$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$. Заметим однако, что, как и в случае линейного уравнения (2.24), решение $u(t)$ не принадлежит, вообще говоря, пространству $C([0,T], W_b^{2,q}(\Omega))$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.2)–(3.10). *Тогда задача* (3.1) *имеет хотя бы одно решение* $u(t)$, *принадлежащее пространству* (3.11), *и для любого такого решения справедлива оценка*

$$\|u(t),\Omega\cap B^1_{x_0}\|_{2,q}\le Q(\|u(0)\|_{W^{2,q}_b(\Omega)})e^{-\alpha t}+\\ +Q(\|u^0\|_{\Psi_b(\mathbb{R}_+\times\partial\Omega)})e^{-\alpha\,\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)}+Q(\|g\|_{L^q_b(\Omega)}),\quad(3.13)$$

для некоторого $\alpha>0$ *и некоторой монотонной функции* Q.

Доказательство. Выведем сначала аналог оценки (3.13) для случая $W^{1,2}_b$-нормы.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда справедлива оценка*

$$\|u(T)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}+\int_T^{T+1}\|u(t)\|^2_{W^{2,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\,dt\le C(1+\|g\|^2_{L^q_b(\Omega)})+\\ +Ce^{-\alpha T}\|u(0)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}+\phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b}),\quad(3.14)$$

где функции $\phi_{\varepsilon,V}$ *такие же, как и в* (1.9), (1.9′), $x_0\in\Omega$, $\varepsilon,\alpha>0$ – *достаточно малые положительные константы, а константа* C *и монотонная функция* Q *не зависят от* x_0.

Доказательство. Как и в случае линейного уравнения, умножим уравнение (3.1) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $\phi_{\varepsilon,x_0}u(t)$ и проинтегрируем по частям, используя второе условие (3.5) и оценку (2.16). Тогда, аналогично выводу оценок (2.17) и (2.27), получим, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$\partial_t\left(|u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)+\alpha\left(|\nabla_x u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)+\left((\lambda_0-|\operatorname{div}(L)|)|u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)\le\\ \le C(1+\|g\|^2_{L^2_b})+C\|u^0\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\partial\Omega)}+C\left(|u^0|,|\nabla_x u(t)|\phi_{\varepsilon,x_0}\right)_{\partial\Omega},$$

для некоторого положительного $\alpha>0$ (здесь и далее символ $(u,v)_{\partial\Omega}$ означает скалярное произведение в $L^2(\partial\Omega)$). Применив теперь неравенство Гронуолла к последней оценке и использовав условие (3.3), получим

$$\|u(T)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}+\int_T^{T+1}\|u(t)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\,dt\le C(1+\|g\|^2_{L^2_b})+\\
+Ce^{-\alpha T}\|u(0)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}+C_\nu\|u^0\|^2_{\Psi_b}+\\
+\nu\int_0^{T+1}e^{-\alpha(T+1-t)}\|\nabla_x u(t)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\partial\Omega)}\,dt,\quad(3.16)$$

где константы $C, C_\nu, \alpha>0$ не зависят от x_0, а константа $\nu>0$ может быть выбрана сколь угодно малой.

Умножим теперь уравнение (3.1) скалярно на функцию

$$\sum_{i=1}^n\partial_{x_i}(\phi_{\varepsilon,x_0}\partial_{x_i}u(t))=\phi_{\varepsilon,x_0}\Delta_x u(t)+\nabla_x\phi_{\varepsilon,x_0}.\nabla_x u(t)\quad(3.17)$$

и проинтегрируем по частям, используя третье условие (3.5) для оценки нелинейного члена. Тогда, при достаточно малом $\varepsilon>0$ будем иметь

$$\partial_t\left(|\nabla_x u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)+2\alpha\left(|\Delta_x u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)\le C(1+\|g\|^2_{L^2_b})+\\
(2K+C\|L\|^2_{0,\infty})\left(\|\nabla_x u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)+\\
+C\left(|\partial_t u^0(t)|+|f(u^0(t))|,|\nabla_n u(t)|\phi_{\varepsilon,x_0}\right)_{\partial\Omega}.\quad(3.18)$$

Заметим теперь, что согласно предложениям 2.1 и 2.4,

$$\|\nabla_x u(t)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\partial\Omega)}\le C\left(\|\Delta_x u(t)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}+\|u(t)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\right).\quad(3.19)$$

Более того, согласно выбору показателя $q>n+1$, краевое условие $u^0\in C_b(\mathbb{R}_+\times\partial\Omega)$, и таким образом, согласно (1.26), последнее слагаемое в правой части (3.18) допускает оценку

$$\left(|\partial_t u^0(t)|+|f(u^0(t))|,|\nabla_n u(t)|\phi_{\varepsilon,x_0}\right)_{\partial\Omega}\le\\
\le C_\nu\phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})+\nu\left(|\Delta_x u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)+\nu\left(|u(t)|^2,\phi_{\varepsilon,x_0}\right)$$

для некоторой монотонной функции Q. Подставив эту оценку в (3.18) и выбрав $\nu > 0$ достаточно малым, получим

$$\partial_t \left(|\nabla_x u(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + \alpha \left(|\Delta_x u(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) \le C(1 + \|g\|^2_{L^2_b}) \\ + \mathrm{C} \left(|\nabla_x u(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + C \left(|u(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + C\phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0) Q(\|u^0\|_{\Psi_b}), \tag{3.19'}$$

где константа C не зависит от $x_0 \in \Omega$. Применив неравенство Гронуолла к последней оценке и использовав неравенство (3.16) для оценки интеграла от $\|\nabla_x u(t)\|$, после несложных преобразований будем иметь

$$\|u(T)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + \int_T^{T+1} \|\Delta_x u(t)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\,dt \le C_\nu(1 + \|g\|^2_{L^2_b}) + \\ + C_\nu e^{-\alpha T}\|u(0)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + C_\nu \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega} Q(\|u^0\|_{\Psi_b}) + \\ + \nu \int_0^{T+1} e^{-\alpha(T+1-t)} \|\nabla_x u(t)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\partial\Omega)}\,dt, \tag{3.20}$$

для некоторых положительных констант $C_\nu, \alpha, \varepsilon > 0$, не зависящих от x_0, и произвольного $\nu > 0$. Использовав вновь оценку (3.19), выбрав достаточно малое $\nu > 0$ в неравенстве (3.20) и применив к нему неравенство Гронуолла еще раз, мы получим оценку (3.14). Лемма 3.1 доказана.

В качестве следующего шага мы получим аналог оценки (3.13) для $W^{2,2}_b$-нормы. Для этого нам понадобится следующая "норма":

$$\|v\|^2_{D_{\varepsilon,x_0}} := \|v\|^2_{W^{2,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + \|f(v)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}, \tag{3.21}$$

зависящая от $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in \Omega$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного $x_0 \in \Omega$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|^2_{D_{\varepsilon,x_0}} \le Ce^{2(K+1)t}(\|u(0)\|^2_{D_{\varepsilon,x_0}} + 1 + \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})), \tag{3.22}$$

где константа K такая же, как и в условии (3.5), а константа C не зависит от $x_0 \in \Omega$.

Доказательство. Продифференцируем уравнение (3.1) по t и обозначим $\theta(t) := \partial_t u(t)$. Тогда эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \partial_t \theta = a\Delta_x \theta - (L, \nabla_x)\theta - \lambda_0 \theta - f'(u(t))\theta, \\ \theta\big|_{t=0} = a\Delta_x u_0 - (L, \nabla_x) u_0 - \lambda_0 u_0 - f(u_0) + g, \quad \theta\big|_{\partial\Omega} = \partial_t u^0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Продолжим теперь краевое условие $\partial_t u^0$ на весь цилиндр $\mathbb{R} \times \Omega$ по формуле (2.50) и определим функцию $w(t)$ как решение следующего линейного уравнения в $\mathbb{R} \times \Omega$

$$\partial_t w = a\Delta_x w - \lambda_0 w, \quad w\big|_{\partial\Omega} = \widehat{\partial_t u^0}. \tag{3.24}$$

Тогда, согласно предложениям 2.5 и 1.5, справедлива следующая оценка

$$\|w(T)\|_{W^{2(1-1/q),q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + \|w\|_{W^{(1,2),q}_{b,\phi_{\varepsilon,x_0}}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C\phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}\|u^0\|_{\Psi_b}, \tag{3.25}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а C не зависит от $x_0 \in \Omega$. Рассмотрим теперь функцию $W(t) := \theta(t) - w(t)$, которая, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t W = a\Delta_x W - (L, \nabla_x)W - \lambda_0 W - f'(u)W + \\ + f'(u)w + (L, \nabla_x)w, \quad W\big|_{\partial\Omega} = 0, \ W(0) = \theta(0) - w(0). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Умножая уравнение (3.26) скалярно на функцию $W(t)\phi_{\varepsilon,x_0}$, интегрируя по частям, и используя третье условие (3.5), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \partial_t \left(|W(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) - 2K\left(|W(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) \le \\ \le C\phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)\|u^0\|^2_{\Psi_b} + C\left(|f'(u(t))w(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Заметим теперь, что, так как показатель $q > n+1$ и $W^{(1,2),q} \subset C$ (см. [4]), то $w \in C_b(\mathbb{R}\times\Omega)$ и, следовательно, согласно второму условию (3.6),

$$\begin{aligned} \left(|f'(u(t))w(t)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) \le \nu\left(|f'(u)|^{2p/(p-1)}, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + C_\nu \|w\|^{2p}_{L^{2p}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le \\ \le \nu\left(|f(u)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + C_\nu\left(|u|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\right) + 1 + C_\nu \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0) Q(\|u^0\|_{\Psi_b}). \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (3.27) и применяя неравенство Гронуолла, получим, возвращаясь к переменной $\partial_t u(t) = W(t) + w(t)$,

$$\|\partial_t u(T)\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le C_\nu e^{2KT}\Big(\|u(0)\|^2_{D_{\varepsilon,x_0}} +$$
$$+ \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b}) + \|g\|^2_{L^2_b}\Big) + \nu\int_0^T e^{2K(T-t)}\|f(u(t))\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\,dt, \tag{3.28}$$

где константа C_ν не зависит от $x_0 \in \Omega$, а константа $\nu > 0$ может быть выбрана сколь угодно малой.

Имея оценку (3.28) для $\partial_t u(t)$, мы можем записать уравнение (3.1) в виде эллиптического уравнения

$$a\Delta_x u(t) - \lambda_0 u(t) - f(u(t)) =$$
$$= \partial_t u(t) + (L, \nabla_x)u(t) - g, \quad u(t)\big|_{\partial\Omega} = u^0(t). \tag{3.29}$$

Умножая (3.29) на функцию (3.17), интегрируя по частям, аналогично (3.18), (3.19′) и используя оценки (3.28), (3.14) и третье условие (3.5), будем иметь

$$\big(|\Delta_x u(T)|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\big) \le C_\nu e^{2KT}\Big(\|u(0)\|^2_{D_{\varepsilon,x_0}} + \|g\|^2_{L^2_b} +$$
$$+\phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})\Big) + C\nu\int_0^T e^{2K(T-t)}\|f(u(t))\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\,dt, \tag{3.30}$$

где константы C, C_ν не зависят от x_0, а ν – произвольно малое положительное число. Выражая теперь $f(u)$ из уравнения (3.1) и используя уже полученные оценки (3.28) и (3.30), получим

$$\big(|f(u(T))|^2, \phi_{\varepsilon,x_0}\big) \le C_\nu e^{2KT}\Big(\|u(0)\|^2_{D_{\varepsilon,x_0}} + \|g\|^2_{L^2_b} +$$
$$+\phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})\Big) + C\nu\int_0^T e^{2K(T-t)}\|f(u(t))\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\,dt. \tag{3.31}$$

Применив неравенство Гронуолла к соотношению (3.31) и выбрав ν достаточно малым, получим

$$\|f(u(T))\|^2_{L^2_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le$$
$$\le Ce^{(2K+1)T}\Big(\|u(0)\|^2_{D_{\varepsilon,x_0}} + \|g\|^2_{L^2_b} + \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})\Big). \tag{3.32}$$

Оценка (3.22) следует теперь из оценок (3.32) и (3.30). Лемма 3.2 доказана.

Заметим, однако, что полученная в лемме 3.2 оценка $W^{2,2}$-нормы решения стремится к ∞ при $t \to \infty$. Для устранения этой расходимости мы воспользуемся сглаживающим свойством для уравнения (3.1) в следующей форме.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ и произвольного $x_0 \in \Omega$ справедлива оценка*

$$\|u(1)\|^2_{W^{2,2}_{\phi_{p\varepsilon},x_0}(\Omega)} \leq \\ \leq C\left(\|u(0)\|^{2p}_{W^{1,2}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + 1 + \|g\|^{2p}_{L^2_b} + \phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})\right), \quad (3.33)$$

где p такое же, как и в условии (3.6), константа C и монотонная функция Q, не зависят от $x_0 \in \Omega$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $x_0 \in \Omega$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$. Тогда из оценки (3.14) следует, что

$$\int_0^1 \|u(t)\|^2_{W^{2,2}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\,dt \leq \\ \leq C\left(\|u(0)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_b} + \phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})\right).$$

Таким образом, существует момент времени $T = T(x_0) \in [0,1]$, такой что

$$\|u(T)\|^2_{W^{2,2}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \leq \\ \leq C\left(\|u(0)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_b} + \phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})\right). \quad (3.34)$$

Заметим теперь, что ограничение на показатель p роста нелинейности $f(u)$ выбрано таким образом, чтобы было справедливо вложение $W^{2,2}(V_{x_0}) \subset L^{2p}(V_{x_0})$ (напомним, что области V_{x_0} введены в определении 1.1). Поэтому, используя оценки (1.20) и (1.22), будем иметь

$$
\begin{gathered}
\|f(u(T))\|^2_{L^2_{\phi_{p\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le C\left(1+\int_{x\in\Omega} e^{-p\varepsilon|x-x_0|}|u(T,x)|^{2p}\,dx\right) \le \\
\le C_1\left(1+\int_{x\in\Omega} e^{-p\varepsilon|x-x_0|}\|u(T),V_x\|^{2p}_{0,2p}\,dx\right) \le \\
\le C_2\left(1+\int_{x\in\Omega} e^{-p\varepsilon|x-x_0|}\|u(T),V_x\|^{2p}_{2,2}\,dx\right) \le \\
\le C_3\left(1+\int_{x\in\Omega} e^{-p\varepsilon|x-x_0|}\left(\int_{y\in\Omega} e^{-\delta|y-x|}\|u(T),V_y\|^2_{2,2}\,dy\right)^p dx\right) \le \\
C_4\left(1+\int_{x\in\Omega} e^{-\varepsilon|x-x_0|}\|u(T),V_x\|^2_{2,2}\,dx\right)^p \le C_5\left(1+\|u(T)\|^2_{W^{2,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\right)^p
\end{gathered}
\tag{3.35}
$$

для некоторого $\delta > \varepsilon$. Из оценок (3.34) и (3.35) следует, что

$$
\|u(T)\|^2_{D_{p\varepsilon,x_0}} \le C(\|u(0)\|^{2p}_{W^{1,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + \|g\|^{2p}_{L^2_b} + \phi_{p\alpha,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})) \tag{3.36}
$$

с некоторой константой C и некоторой монотонной функцией Q, не зависящей от $x_0 \in \Omega$. Использовав теперь оценку (3.22) с $t = 1$, начальным моментом $t = T$, вместо $t = 0$, и $p\varepsilon$ вместо ε, и оценив D_{ε,x_0}-норму решения в начальный момент $t = T$ с помощью (3.36), мы получим оценку (3.33). Лемма 3.3 доказана.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ справедлива следующая оценка:*

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{W^{2,2}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le e^{-\alpha T}Q(\|u(0)\|_{W^{2,2}_b}) + Q(\|g\|_{L^2_b}) + \\
+ \phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

с константой C и монотонной функцией Q, не зависящей от x_0.

Действительно, при $t \le 1$ оценка (3.37) следует из (3.22), а при $t \ge 1$ – из оценок (3.33) и (3.14).

Заметим теперь, что, благодаря условию $p < 1 + 4/(n-4)$ и соответствующей теореме вложения, нелинейность $f(u)$ оказывается подчиненной линейной части уравнения (3.1) в пространстве $W_b^{2,2}(\Omega)$. Поэтому оценка (3.13) для $W^{2,q}$-нормы решения может быть получена из оценки (3.37), используя соответствующие оценки для линейного уравнения. Мы получим сначала оценку $W^{2-\delta,q}$-нормы решения.

Лемма 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда существует малое $\delta > 0$, такое что для достаточно малых $\varepsilon, \alpha > 0$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + \|u(t)\|^q_{L^\infty_{\phi_{\varepsilon/q,x_0}}(\Omega)} \le \\ \le e^{-\alpha t} Q(\|u(0)\|_{W_b^{2,2}}) + Q(\|g\|_{L_b^2}) + \phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0) Q(\|u^0\|_{\Psi_b}) \quad (3.38)$$

с константой C и монотонной функцией Q, не зависящей от x_0.

Доказательство. Действительно, определим функцию $w(t)$ как решение линейного уравнения

$$\partial_t w = a\Delta_x w - \lambda_0 w + g, \quad w\big|_{t=0} = u_0, \quad w\big|_{\partial\Omega} = u^0. \quad (3.39)$$

Тогда, согласно предложениям 2.4 и 2.6–2.8,

$$\|w(t)\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le Ce^{-\lambda_0 t/2}\|u_0\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + \\ + C\|g\|_{L^q_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + C\phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)\|u^0\|_{\Psi_b} \quad (3.40)$$

с константой C, не зависящей от $x_0 \in \Omega$. Введем теперь функцию $v(t) := u(t) - w(t)$ и перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\partial_t v - a\Delta_x v + \lambda_0 v = (L, \nabla_x)w(t) - (L, \nabla_x)v(t) - \\ - f(v(t) + w(t)) := h(t), \quad w\big|_{t=0} = w\big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.41)$$

Применив оценку (2.40) с $\alpha = 0$ к уравнению (3.41), и использовав первое условие (3.6) для оценки нелинейности и оценку (3.40) для оценки норм функции w, после несложных преобразований получим, что для любого $0<\delta<1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|v(T)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 q(T-t)/2}\|h(t)\|^q_{L^q_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\} \le \\ \le e^{-\lambda_0 qT/2}Q(\|u_0\|_{W^{2,q}_b(\Omega)}) + Q(\|g\|^q_{L^q_b}) + \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})+ \\ + C\sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 q(T-t)/2}\|v(t)\|^q_{W^{1,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\}+ \\ + C\sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 q(T-t)/2}\|v(t)\|^{pq}_{W^{0,pq}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Таким образом, необходимо оценить два последних слагаемых в правой части неравенства (3.42). Заметим, прежде всего, что предпоследнее слагаемое оценивается элементарно при помощи интерполяционного неравенства (аналогично (2.43)) и оценки (3.37)

$$\begin{aligned}\|v(t)\|^q_{W^{1,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le \nu\|v(t)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + C_\nu\|v(t)\|^q_{W^{2,2}_{\phi_{2\varepsilon/q,x_0}}(\Omega)} \le \\ \le \nu\|v(t)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + e^{-\alpha t}Q_\nu(\|u(0)\|_{W^{2,2}_b})+ \\ + Q_\nu(\|g\|_{L^2_b}) + \phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0)Q_\nu(\|u^0\|_{\Psi_b}),\end{aligned} \tag{3.43}$$

для некоторой монотонной функции Q_ν, не зависящей от x_0 и произвольного $\nu>0$. Оценим теперь последнее слагаемое. Для этого заметим, что если $pq<2p_{max}:=\frac{2n}{n-4}$ (например, если $n\le 4$), то, согласно теореме вложения

$$\|v(t),V_x\|^{pq}_{0,pq} \le C\|v(t),V_x\|^{pq}_{2,2}. \tag{3.44}$$

Предположим теперь, что $pq>2p_{max}$. Тогда, согласно интерполяционному неравенству (см., например,[30]),

$$\|v(t),V_x\|^{pq}_{0,pq} \le C\|v(t),V_x\|^{pq(1-\theta)}_{2,2}\|v(t),V_x\|^{\theta pq}_{2-\delta,q}, \tag{3.45}$$

где показатель θ вычисляется по формуле

$$p\theta := \frac{q-\alpha}{\alpha(q-1-\delta/n)}, \tag{3.46}$$

где $\alpha := p_{max}/p > 1$. Следовательно, при достаточно малом положительном $\delta > 0$ показатель $p\theta < 1$. Фиксируя такой показатель и применяя неравенство Юнга к оценке (3.45), будем иметь

$$\|v(t), V_x\|_{0,pq}^{pq} \le C_\nu \|v(t), V_x\|_{2,2}^N + \nu \|v(t), V_x\|_{2-\delta,q}^q, \tag{3.47}$$

где C_ν не зависит от x, а константа ν может быть выбрана сколь угодно малой.

Умножив теперь (3.47) (или (3.44)) на $\phi_{\varepsilon,x_0}(x)$, проинтегрировав по $x \in \Omega$, и использовав оценку (3.37), аналогично (3.35), получим

$$\|v(t)\|^{pq}_{L^{pq}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le \nu \|v(t)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + e^{-\alpha t} Q_\nu(\|u(0)\|_{W^{2,2}_b}) \\ + Q_\nu(\|g\|_{L^2_b}) + \phi_{\alpha,\partial\Omega}(x_0) Q_\nu(\|u^0\|_{\Psi_b}), \tag{3.48}$$

для некоторой монотонной функции Q_ν, не зависящей от x_0 и произвольного $\nu > 0$. Подставив оценки (3.43) и (3.48) в неравенство (3.42), после элементарных преобразований получим

$$\|v(T)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le e^{-\lambda_0 q T/2} Q_\nu(\|u_0\|_{W^{2,q}_b(\Omega)}) + Q_\nu(\|g\|^q_{L^q_b}) + \\ + \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0) Q_\nu(\|u^0\|_{\Psi_b}) + C\nu \sup_{t\in[0,T]} \{e^{-\lambda_0 q(T-t)/2} \|v(t)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}\}, \tag{3.49}$$

Зафиксировав теперь $\nu > 0$ в (3.49) достаточно малым (чтобы выполнялось неравенство $C\nu < 1/2$), аналогично (2.44) будем иметь

$$\|v(T)\|^q_{W^{2-\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le e^{-\alpha T} Q(\|u_0\|_{W^{2,q}_b(\Omega)}) + Q(\|g\|^q_{L^q_b}) + \\ + \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0) Q(\|u^0\|_{\Psi_b}), \tag{3.50}$$

для некоторых положительных констант $\varepsilon, \alpha > 0$ и некоторой монотонной функции Q, не зависящей от x_0. Оценка (3.38) следует теперь из (3.50) и теоремы вложения $W^{2-\delta,q} \subset C$ (напомним, что $q > n+1$). Лемма 3.5 доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство оценки (3.13). Для этого мы применим оценку (2.40) (с $\alpha = 1 - \delta$) к уравнению (3.41). Тогда, используя оценку (3.40) и (3.38), получим

$$\|v(T)\|^q_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 q(T-t)/2}\|h(t)\|^q_{W^{1-\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\} \le$$
$$\le e^{-\lambda_0 qT/2}Q(\|u_0\|_{W^{2,q}_b(\Omega)}) + Q(\|g\|^q_{L^q_b}) + \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b})+$$
$$+ C\sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0 q(T-t)/2}\|f(u(t))\|^q_{W^{1-\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\}. \quad (3.51)$$

Заметим, что, согласно условиям (3.5), $f \in C^1$. Поэтому из оценки (3.38) и вложения $W^{2-\delta,q} \subset C$ следует, что

$$\|f(u(t))\|^q_{W^{1,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le$$
$$\le \|f'(u(t))\nabla_x u(t)\|^q_{L^q_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + \|f'(u(t))\|^q_{L^q_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le$$
$$\le e^{-\alpha t}Q(\|u_0\|_{W^{2,q}_b(\Omega)}) + Q(\|g\|^q_{L^q_b}) + \phi_{\varepsilon/2,\partial\Omega}(x_0)Q(\|u^0\|_{\Psi_b}) \quad (3.52)$$

для некоторых положительных констант $\varepsilon, \alpha > 0$ и некоторой монотонной функции Q, не зависящей от $x_0 \in \Omega$. Подставив эту оценку в неравенство (3.51), получим оценку (3.13). Для завершения доказательства теоремы остается доказать разрешимость задачи (3.1).

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда задача* (3.1) *имеет хотя бы одно решение из пространства* (3.11).

Доказательство. Действительно, определим последовательность срезающих функций $\varphi_M \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $M \in \mathbb{N}$, таких что

$$\operatorname{supp}\varphi_M \subset B_0^M, \quad \varphi_M(x) \equiv 1, \text{ если } x \in B_0^{M-1}, \quad (3.53)$$

таких что $\|\varphi_M\|_{C^2_b(\mathbb{R}^n)} \le C$, где C не зависит от M, и рассмотрим последовательность $u_M(t)$ решений следующих задач в ограниченных областях Ω_M:

$$\begin{cases} \partial_t u_M = a\Delta_x u_M - (L,\nabla_x)u_M + \lambda_0 u_M - f(u_M) + g, \\ u_M\big|_{t=0} = \varphi_M u_0, \quad u_M\big|_{\partial\Omega_M} = \varphi_M u^0, \end{cases} \quad (3.54)$$

где области Ω_M, такие же, как и в (1.3). Так как области Ω_M удовлетворяют условиям (1.1) и (1.2) равномерно по $M \in \mathbb{N}$, то оценка (3.13) также выполняется равномерно по $M \in \mathbb{N}$. В частности, для любого решения u_M задачи (3.54) справедлива оценка

$$\|u_M\|_{W_b^{2,q}(\Omega_M)} \le C = C(u_0, u^0, g), \tag{3.55}$$

где константа C не зависит от M. Разрешимость задачи (3.54) в *ограниченной* области Ω_M выводится стандартным образом из априорной оценки (3.55), например, используя принцип Лерэ-Шаудера (см. [21], [31]). Существование решения u в неограниченной области Ω доказывается теперь предельным переходом $M \to \infty$ в уравнениях (3.54). Лемма 3.6 доказана. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Отметим, что в доказательстве теоремы 3.1 фактически использовалась лишь гладкость $f \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ нелинейной функции. Более того второе условие (3.6) использовалось лишь в лемме 3.2 для оценки последнего слагаемого в правой части (3.25). Заметим, что в случае автономного краевого условия $u^0(t) \equiv u^0$, это слагаемое равно нулю тождественно, поэтому в автономном случае утверждение теоремы справедливо без второго условия (3.6).

§4 Единственность решений.

В этом параграфе мы докажем, что решение задачи (3.1) единственно и получим ряд оценок для разности между двумя решениями (с различными начальными условиям), которые будут использованы в дальнейшем для оценки ε-энтропии аттрактора. Мы начнем со следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда решение задачи (3.1) единственно, и для любых двух решений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ этой задачи (с различными начальными условиями и одинаковым краевым условием) справедлива оценка*

$$\|u_1(T) - u_2(T)\|^2_{L^2_{\phi_\varepsilon, x_0}(\Omega)} + \int_T^{T+1} \|u(t)\|^2_{W^{1,2}_{\phi_\varepsilon, x_0}(\Omega)}\, dt \le \\ \le Ce^{2KT}\|u_1(0) - u_2(0)\|^2_{L^2_{\phi_\varepsilon, x_0}(\Omega)}, \tag{4.1}$$

для достаточно малого положительного $\varepsilon > 0$ и константы C, зависящей только от уравнения (3.1) (и не зависящей от u_1, u_2 и $x_0 \in \Omega$). Более *того, справедлива оценка*

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{W^{2,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le Me^{Kt}\|u_1(0)-u_2(0)\|_{W^{2,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}, \tag{4.2}$$

где, в отличие от (4.1), *константа* M *зависит от* $\|u_i(0)\|_{W^{2,q}_b}$, $\|u^0\|_{\Psi_b}$ *и* $\|g\|_{L^q_b}$, *но не зависит от* $x_0 \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $v(t) := u_1(t) - u_2(t)$. Тогда эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v = a\Delta_x v - (L,\nabla_x)v - \lambda_0 v - l(t)v,\ v\big|_{\partial\Omega} = 0,\ v\big|_{t=0} = u_1(0)-u_2(0), \tag{4.3}$$

где $l(t) := \int_0^1 f'(su_1(t) - (1-s)u_2(t))\,ds$. Заметим, что, согласно третьему условию (3.5), $l(t) \ge -K$. Поэтому, умножая уравнение (4.3) на $v(t)\phi_{\varepsilon,x_0}$, интегрируя по $x \in \Omega$ и рассуждая аналогично выводу оценки (3.16) (но учитывая, что теперь $v\big|_{\partial\Omega} = 0$), получим оценку (4.1). Докажем оценку (4.2). Для этого введем функцию $v_1(t)$ как решение линейного уравнения

$$\partial_t v_1 = a\Delta_x v_1 - \lambda_0 v_1,\ v_1\big|_{t=0} = v\big|_{t=0},\ v_1\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.4}$$

Согласно оценке (2.26),

$$\|v_1(t)\|_{W^{2,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le Ce^{-\alpha t}\|v(0)\|_{W^{2,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}, \tag{4.5}$$

где константы $C, \varepsilon > 0$ не зависят от $x_0 \in \Omega$. Пусть $v_2(t) := v(t) - v_1(t)$. Тогда

$$\partial_t v_2 - a\Delta_x v_2 + \lambda_0 v_2 = h(t) := l(t)v_1 + (L,\nabla_x)v_1 - \\ - l(t)v_2 - (L,\nabla_x)v_2,\ v_2\big|_{t=0} = v_2\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.6}$$

Заметим, что согласно оценке (3.13), условию $f \in C^2$ и теореме вложения $W^{2,q}_b \subset C_b$, имеет место оценка

$$\|l(t)\|_{C^1_b(\Omega)} \le M', \tag{4.7}$$

где константа M' зависит от $\|u_i(0)\|_{W_b^{2,q}(\Omega)}$, $\|u^0\|_{\Psi_b}$ и $\|g\|_{L_b^q}$. Применяя оценку (2.40) к уравнению (4.6) и учитывая (4.7) и (4.5), получим

$$\|v_2(T)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0(T-t)/2}\|h(t)\|_{W^{1,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\} \le$$
$$\le Ce^{-\alpha T}\|v(0)\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + C\sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0(T-t)/2}\|v_2(t)\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\} \quad (4.8)$$

для некоторого $0<\delta<1/q$. Используя интерполяционное неравенство

$$\|v_2(t),V_{x_0}\|^q_{2,q} \le C_\nu\|v_2(t),V_{x_0}\|^q_{0,2} + \nu\|v_2(t),V_{x_0}\|^q_{2+\delta,q} \le$$
$$\le C'_\nu\|v_1(t),V_{x_0}\|^q_{2,q} + C'_\nu\|v(t),V_{x_0}\|^q_{0,2} + \nu\|v_2(t),V_{x_0}\|^q_{2+\delta,q}$$

и оценки (4.1) и (4.5), получим

$$\|v_2(t)\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le C_\nu e^{Kt}\|v(0)\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} + \nu\|v_2(t)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \quad (4.9)$$

для достаточно малого $\varepsilon>0$, произвольного $\nu>0$ и константы C_ν, не зависящей от $x_0\in\Omega$. Подставив эту оценку в (4.8), получим

$$\|v_2(T)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le C_\nu e^{KT}\|v(0)\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} +$$
$$+ C\nu\sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0(T-t)/2}\|v_2(t)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\}, \quad (4.10)$$

где константы C, C_ν не зависят от $x_0\in\Omega$. Оценка (4.2) следует из (4.10). Теорема 4.1 доказана.

Сформулируем теперь свойство сглаживания для разностей между решениями уравнения (3.1), которое играет центральную роль при изучении ε-энтропии аттрактора.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда справедлива оценка*

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{W^{2,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \le M\frac{1+t^N}{t^N}e^{Kt}\|u_1(0)-u_2(0)\|_{L^2_{\phi_{2\varepsilon/q,x_0}}(\Omega)}, \quad (4.11)$$

где $N > 0$ – достаточно большое положительное число, константа M зависит от $\|u_i(0)\|_{W_b^{2,q}}$, $\|u^0\|_{\Psi_b}$ и $\|g\|_{L_b^q}$, но не зависит от $x_0 \in \Omega$.

Доказательство. Действительно, пусть $w(t) := t^N v(t)$, где $v(t)$ такая же, как и в теореме 4.1, а N – достаточно большое положительное число, которое будет определено позднее. Тогда

$$\partial_t w - a\Delta_x w + \lambda_0 w = t^{N-1}v - (L,\nabla_x)w - l(t)w,\ w\big|_{t=0} = w\big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.12)$$

Применив оценку (2.40) к уравнению (4.11) и использовав (4.7), получим

$$\|w(T)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le$$
$$\le C \sup_{t\in[0,T]} \{e^{-\lambda_0(T-t)/2}(t^{N-1}\|v(t)\|_{W^{1,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} + \|w\|_{W^{2,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)})\} \quad (4.13)$$

для некоторой константы C, не зависящей от $x_0 \in \Omega$. Используя интерполяционное неравенство и оценку (4.1), аналогично (4.9), получим

$$\|w(t)\|_{W^{2,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le$$
$$\le C_\nu t^N\|v(t)\|_{L^2_{\phi_{2\varepsilon/q,x_0}}(\Omega)} + \nu\|w(t)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le$$
$$\le C_\nu(1+t^N)e^{Kt}\|v(0)\|_{L^2_{\phi_{2\varepsilon/q,x_0}}(\Omega)} + \nu\|w(t)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \quad (4.14)$$

Для оценки предпоследнего слагаемого в (4.13) мы воспользуемся интерполяционным неравенством

$$\|v(t),V_x\|_{1,q} \le C\|v(t),V_x\|^{\theta}_{0,2}\|v(t),V_x\|^{1-\theta}_{2+\delta,q}, \quad (4.15)$$

где $\theta = \theta(q,\delta)$ и константы C, не зависящей от $x \in \Omega$. Зафиксируем теперь $N := 1/\theta$. Тогда, умножая (4.15) на t^{N-1} и применяя неравенство Юнга, будем иметь

$$t^{q(N-1)}\|v(t),V_x\|^q_{1,q} \le C_\nu\|v(t),V_x\|^q_{0,2} + \nu\|w(t),V_x\|^q_{2+\delta,q}, \quad (4.16)$$

где $\nu > 0$ – произвольный малый параметр, а C_ν не зависит от $x \in \Omega$. Умножая (4.16) на $\phi_{\varepsilon,x_0}(x)$ и используя формулу (1.22), получим

$$t^{q(N-1)}\|v(t)\|^q_{W^{1,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)} \le C'_\nu\|v(t)\|^q_{L^2_{\phi_{2\varepsilon/q,x_0}}(\Omega)} + \nu\|w(t)\|^q_{W^{2+\delta,q}_{\phi_{\varepsilon,x_0}}(\Omega)}. \quad (4.17)$$

Подставив оценки (4.14) и (4.17) в правую часть неравенства (4.13) и использовав оценку (4.1), получим

$$\|w(T)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)} \leq$$
$$\mathrm{C}_\nu(1+t^N)\mathrm{e}^{Kt}\|v(0)\|_{L^2_{\phi_{2\varepsilon/q,x_0}}(\Omega)} + \nu \sup_{t\in[0,T]}\{e^{-\lambda_0(T-t)/2}\|w(t)\|_{W^{2+\delta,q}_{\phi_\varepsilon,x_0}(\Omega)}\}. \tag{4.18}$$

Оценка (4.11) есть элементарное следствие (4.18). Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.1. Согласно теоремам 3.1 и 4.1, уравнение (3.1) корректно определяет разрешающий оператор

$$S_t : W^{2,q}_b(\Omega) \cap \{u_0\big|_{\partial\Omega} = u^0\big|_{t=0}\} \to W^{2,q}_b(\Omega) \tag{4.19}$$

по формуле $S_t u_0 := u(t)$, где $u(t)$ – решение задачи (3.1). Кроме того, из оценки (4.1) следует, что разрешающий оператор S_t, определенный первоначально на пространстве $W^{2,q}_b(\Omega)$ (плюс условия согласования), однозначно продолжается по непрерывности до оператора

$$\widehat{S}_t : L^2_{e^{-\varepsilon|x|}}(\Omega) \to L^2_{e^{-\varepsilon|x|}}(\Omega) \tag{4.20}$$

для достаточно малого положительного $\varepsilon > 0$. Таким образом, уравнение (3.1) однозначно разрешимо не только в классе ограниченных при $|x| \to \infty$ начальных условий u_0, но и в классе экспоненциально растущих по x функций с достаточно малым показателем роста $\varepsilon > 0$. В частности, из (4.1) и (1.19) следует, что

$$\|\widehat{S}_t u^1_0 - \widehat{S}_t u^2_0\|_{L^2_b(\Omega)} \leq Ce^{Kt}\|u^1_0 - u^2_0\|_{L^2_b(\Omega)}, \tag{4.21}$$

где константа C не зависит от $u^1_0, u^2_0 \in \Phi_b$. Поэтому, $\widehat{S}_t : L^2_b(\Omega) \to L^2_b(\Omega)$. Заметим однако, что, как нетрудно показать, уравнение (3.1) допускает сглаживание

$$\|u(t)\|_{W^{2,q}_b(\Omega)} \leq \frac{(1+t^N)}{t^N}e^{-\alpha t}Q(\|u_0\|_{L^2_b(\Omega)}) +$$
$$+ Q(\|g\|_{L^q_b(\Omega)}) + Q(\|u^0\|_{\Psi_b}), \tag{4.22}$$

для достаточно большого $N > 0$. Следовательно, аттракторы уравнения (3.1) в фазовых пространствах $W_b^{2,q}$ и L_b^2 совпадают. Более того, можно показать, что и в случае фазового пространства $L^2_{e^{-\varepsilon|x|}}(\Omega)$, аттрактор (3.1) принадлежит пространству $W_b^{2,q}(\Omega)$ и совпадает с аттрактором для случая фазового пространства $W_b^{2,q}(\Omega)$ (см. [42], [55], [59] для более детального изучения уравнений вида (3.1) в пространствах растущих по $|x| \to \infty$ функций). Поэтому в настоящей работе мы ограничились рассмотрением лишь случая фазового пространства $W_b^{2,q}(\Omega)$.

Мы завершим этот параграф доказательством инъективности разрешающих операторов S_t, определенных в (4.19) и получением оценок снизу для разности между решениями уравнения (3.1) определенными на всей оси $t \in \mathbb{R}$. Для простоты мы ограничимся случаем $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$ и постоянного векторного поля $L(x) \equiv L \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $L(x) \equiv L \in \mathbb{R}^n$, и пусть матрица диффузии a является нормальной, то есть*

$$aa^* = a^*a. \tag{4.23}$$

Предположим также, что $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения задачи (3.1) определенные при всех $t \in \mathbb{R}$ ($u_i \in L^\infty(\mathbb{R}, W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n))$). Тогда, для любого $T > 0$ и любого $0 < \alpha < 1$, существует достаточно малое $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$ и константа $C = C(T, \alpha)$, не зависящая от $x_0 \in \Omega$, такая что

$$\|u_1(0) - u_2(0)\|_{L^2_{b,\phi_{\alpha\varepsilon,x_0}}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u_1(T) - u_2(T)\|^{\alpha}_{L^2_{b,\phi_{\varepsilon,x_0}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.24}$$

Доказательство этой теоремы основывается на следующем результате о логарифмической выпуклости решений абстрактных уравнений, доказанном в [39].

Лемма 4.1 [39]. *Пусть H – абстрактное гильбертово пространство и $B : D(B) \to H$ – линейный (неограниченный) оператор в нем. Пусть также $v \in C^1([t_0, t_1], H) \cap C([t_0, t_1], D(B))$ решение уравнения*

$$\partial_t v - Bv = P(t)v, \quad \|P(t)\|_{H \to H} \le P_0. \tag{4.25}$$

Предположим также, что $B = B_+ + B'_- + B''_-$, где B_+ симметрический оператор, а B'_- и B''_- антисимметрические операторы, такие что для *любого $w \in H$ выполнены условия*

$$(B_+w, B'_-w)_H \geq -\gamma\|B_+w\|_H\|w\|_H - \beta\|w\|^2_H, \tag{4.26}$$

$$\|B''_-w\|^2_H \leq \gamma\|B_+w\|_H\|w\|_H + \beta\|w\|^2_H. \tag{4.27}$$

Определим функцию

$$l(t) := 2\ln\|u(t)\|_H - \int_{t_0}^{t}\psi(s)\,ds, \quad \psi(t) := 2\frac{(P(t)u(t), u(t))}{\|u(t)\|^2_H}. \tag{4.28}$$

Тогда для любых $t_0 \leq t \leq t_1$ справедлива оценка

$$l(t) \leq \alpha_\pm l(t_0) + (1-\alpha_\pm)l(t_1) + e^{4\gamma(t_1-t_0)}(t_1-t_0)^2(8\gamma^2+4\beta+2P_0^2), \tag{4.29}$$

где

$$\alpha_\pm := \frac{e^{\pm4\gamma t_1} - e^{\pm4\gamma t}}{e^{\pm4\gamma t_1} - e^{\pm4\gamma t_0}}. \tag{4.30}$$

В (4.30) *нужно взять знак минус, если $l(t_0) \leq l(t_1)$ и знак плюс, если $l(t_0) \geq l(t_1)$.*

Лемма 4.2. *Пусть выполнены предположения леммы 4.1 и пусть известно также, что решение $v(t)$ определено при $(-\infty, t_1]$ и ограничено: $\|v(t)\|_H \leq K$. Тогда, для любого $\mu > 0$ и $t \in (-\infty, t_1)$, существует константа $C = C(t, t_1, \mu, K)$, такая что*

$$\|u(t)\|_H \leq C\|u(t_1)\|^\alpha_H, \quad \alpha := e^{4\gamma(t-t_1)} - \mu. \tag{4.31}$$

Доказательство. Действительно, потенцируя оценку (4.29) и учитывая, что $-2P_0(t-t_0) \leq \int_{t_0}^t \psi(s)\,ds \leq 2P_0(t-t_0)$, получим

$$\|u(t)\|_H \leq C(t, t_1, t_0)\|u(t_1)\|^{1-\alpha_\pm}_H\|u(t_0)\|^{\alpha_\pm}_H. \tag{4.32}$$

Так как $\|u(t_0)\|_H \leq K$, то из (4.32) следует оценка

$$\|u(t)\|_H \leq C'(K, t, t_0, t_1)\|u(t_1)\|^\alpha_H, \tag{4.33}$$

где $\alpha = \min\{1-\alpha_+, 1-\alpha_-\}$. Фиксируем теперь $t_2 = -N$, где $N > 0$ – достаточно большое число. Тогда

$$\alpha = 1 - \alpha_+ = \frac{e^{4\gamma t} - e^{-4\gamma N}}{e^{4\gamma t_1} - e^{-4\gamma N}} \to e^{-4\gamma(t_1 - t)} \tag{4.34}$$

при $N \to \infty$. Поэтому, для любого $\mu > 0$ существует $N = N(\mu)$, такое что $\alpha \geq e^{-4\gamma(t_1-t)} - \mu$. Лемма 4.2 доказана.

Теперь мы готовы доказать теорему 4.3. Действительно, определим функцию $v(t) := u_1(t) - u_2(t)$. Тогда эта функция удовлетворяет уравнению

$$\partial_t v = a\Delta_x v - (L, \nabla_x)v - \lambda_0 v - l(t)v, \tag{4.35}$$

где $l(t) := \int_0^1 f'(su_1(t) + (1-s)u_2(t))\,ds$. Напомним, что $u_i(t)$ ограниченные при $t \in \mathbb{R}$ решения уравнения (3.1), поэтому, согласно теореме 3.1,

$$\|u_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}, W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n))} \leq Q(\|g\|_{L_b^q(\mathbb{R}^n)}). \tag{4.36}$$

Следовательно, аналогично (4.7),

$$\|l(t)\|_{C_b^1(\mathbb{R}^n)} \leq Q_1(\|g\|_{L_b^q(\mathbb{R}^n)}), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.37}$$

Пусть теперь $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и пусть $\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}(x) := e^{-\varepsilon(1+|x-x_0|^2)^{1/2}}$. Тогда, очевидно, $\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}(x)$ – весовые функции экспоненциального роста ε, удовлетворяющие (1.5) равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Более того, эти функции являются гладким (C^∞) аналогом весовых функций ϕ_{ε,x_0}, то есть

$$\begin{gathered} C_1\phi_{\varepsilon,x_0}(x) \leq \widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}(x) \leq C_2\phi_{\varepsilon,x_0}(x), \\ |\nabla_x \widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}| \leq \varepsilon\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}(x), \ |D_x^2 \widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}(x)| \leq C_3(\varepsilon^2 + \varepsilon)\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}(x), \end{gathered} \tag{4.38}$$

где константы C_i не зависят от $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Введем функцию $w_{x_0}(t) := v(t)\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}$. Тогда, как нетрудно проверить, эта функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} \partial_t w_{x_0}(t) - a\Delta_x w_{x_0}(t) + (L, \nabla_x)w_{x_0}(t) + \\ + K_1(x)w_{x_0}(t) + K_2(x)\nabla_x w_{x_0}(t) + l(t)w_{x_0}(t) = 0, \end{gathered} \tag{4.39}$$

где

$$K_1(x)w := \left(\frac{\Delta_x \widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}}{\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}} - 2\frac{|\nabla_x \widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}|^2}{\widetilde{\phi}^2_{\varepsilon,x_0}}\right) aw - [(L,\nabla_x)\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}]w,$$

$$K_2(x)\nabla_x w = 2\widetilde{\phi}^{-1}_{\varepsilon,x_0}\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}.a\nabla_x w := 2\widetilde{\phi}^{-1}_{\varepsilon,x_0}\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0} a\partial_{x_i} w.$$

Более того, из (4.38) следует, что

$$|K_i(x)| + |\nabla_x K_i(x)| \le C\varepsilon$$

для некоторой константы C, не зависящей от x и x_0.

Проверим, что уравнение (4.39) удовлетворяет условиям леммы 4.1. Действительно, в этом случае $H := [L^2(\mathbb{R}^n)]^k$, $Rw := K_2(x)\nabla_x w$,

$$B_+ = 1/2(a+a^*)\Delta_x - \lambda_0 - 1/2(R+R^*),$$
$$B'_- := 1/2(a-a^*)\Delta_x - (L,\nabla_x), \quad B''_- := -1/2(R-R^*)$$

и $P(t)w := -K_1(x)w - l(t)w$. Тогда, очевидно, B_+ – симметрический, а B'_- и B''_- антисимметрические операторы. Для того, чтобы проверить условия (4.26) и (4.27) мы посчитаем сначала оператор R^*:

$$R^*w := -2\widetilde{\phi}^{-1}_{\varepsilon,x_0}\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}.a^*\nabla_x w - 2\nabla_x\cdot\left(\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}\phi^{-1}_{\varepsilon,x_0}\right)a^*w \tag{4.40}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}(B_+w, B'_-w) = 1/4\left((a+a^*)\Delta_x w, (a-a^*)\Delta_x w\right) - \\ \frac{1}{2}\left((L,\nabla_x)w, (a+a^*)\Delta_x w\right) - \frac{1}{2}\left(\widetilde{\phi}^{-1}_{\varepsilon,x_0}\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}.(a-a^*)\nabla_x w, (a-a^*)\Delta_x w\right) \\ + \frac{1}{2}\left(\nabla_x\left(\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}\widetilde{\phi}^{-1}_{\varepsilon,x_0}\right)a^*w, (a-a^*)\Delta_x w\right) + \\ + \left((L,\nabla_x)w, 1/2(R+R^*)w\right).\end{gathered} \tag{4.41}$$

Так как матрица диффузии a нормальна (см. условие (4.23)), то первое слагаемое в правой части (4.41) равно нулю тождественно. Второе слагаемое также равно нулю тождественно, так как подынтегральное выражение является полной производной. Интегрируя по частям третье слагаемое, получим

$$\left(\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}^{-1}\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}.(a-a^*)\nabla_x w,(a-a^*)\Delta_x w\right)=$$
$$-1/2\left(\nabla_x(\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}^{-1}\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0})(a-a^*)\nabla_x w,(a-a^*)\nabla_x w\right)\le C\varepsilon\|\nabla_x w\|_H^2. \tag{4.42}$$

Заметим теперь что $1/2(R+R^*)$ дифференциальный оператор первого порядка, более того

$$\|(R+R^*)w\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}\le C_1\varepsilon\|w\|_{W^{2,2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Поэтому, из теоремы о регулярности решений уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^n$ следует, что при достаточно малом $\varepsilon>0$

$$C_1\|w\|_{W^{2,2}(\mathbb{R}^n)}\le\|B_+w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le C_2\|w\|_{W^{2,2}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.43}$$

Из оценки (4.43) и интерполяционного неравенства следует что

$$\varepsilon\|\nabla_x w\|_H^2\le C\varepsilon\|w\|_{W^{2,2}(\mathbb{R}^n)}\|w\|_H\le C_1\varepsilon\|B_+w\|_H\|w\|_H. \tag{4.44}$$

Четвертое слагаемое в правой части неравенства (4.41) оценивается с помощью неравенства Коши-Буняковского и оценки (4.43)

$$\left(\nabla_x\left(\nabla_x\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}^{-1}\right)a^*w,(a-a^*)\Delta_x w\right)\ge$$
$$\ge -C\varepsilon\|w\|_H\|\Delta_x w\|_H\ge -C_2\varepsilon\|B_+w\|_H\|w\|_H. \tag{4.45}$$

И, наконец, последнее слагаемое в правой части (4.41) также элементарно оценивается при помощи неравенства (4.44). Из оценок (4.41)–(4.45) следует, что

$$(B_+w,B_-'w)\ge-\gamma\|B_+w\|_H\|w\|_H,\quad\gamma=C\varepsilon.$$

Таким образом, условие (4.26) проверено. Проверим теперь условие (4.27). Действительно, так как B_-'' дифференциальный оператор первого порядка, то из оценок (4.43) и (4.44) следует, что

$$\|B_-''w\|_H^2\le C\varepsilon\left(\|\nabla_x w\|_H^2+\|w\|_H^2\right)\le C_1\varepsilon(\|B_+w\|_H\|w\|_H+\|w\|_H^2). \tag{4.46}$$

Следовательно, условие (4.27) также проверено.

Заметим, наконец, что из оценки (4.35′) следует, что $\|w_{x_0}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq K$, где K не зависит от x_0. Таким образом, все условия лемм 8.1 и 8.2 проверены, и, следовательно, согласно оценке (8.31) с $t_1 = T$ и $t = 0$,

$$\|w_{x_0}(0)\|_{0,2} \leq C(\varepsilon, \mu, T)\|w_{x_0}(T)\|_{0,2}^{\alpha}. \tag{4.47}$$

Здесь $\alpha := e^{-C\varepsilon T} - \mu$, где $\mu > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, а константа C не зависит от x_0.

Заметим также, что, выбирая ε, μ достаточно малыми, мы можем сделать константу Гельдера $\alpha < 1$ в (4.47) сколь угодно близкой к 1.

Оценка (4.24) немедленно следует из (4.47) и (4.38). Теорема 4.3 доказана.

Замечание 4.2. Изменяя вид скалярного произведения в $\mathbb{R}^k$ подходящим образом, можно добиться выполнения условия (4.23) если (и только если) матрица a диагонализируема (то есть не имеет жордановых клеток порядка больше единицы над $\mathbb{C}$). Таким образом, утверждение теоремы 4.3 остается справедливым для любой диагонализируемой матрицы диффузии a.

Глава 2. Аттрактор нелинейного уравнения в неограниченной области.

В настоящей главе мы построим глобальный аттрактор для системы (0.1) и получим асимптотически точные оценки сверху и снизу для его колмогоровской ε-энтропии.

Существование локально-компактного глобального аттрактора $\mathcal{A}$ системы (0.1) доказано в параграфе 5.

Определение колмогоровской ε-энтропии и явный вид ее асимптотики при $\varepsilon \to 0$ для некоторых классических множеств в функциональных пространствах приведены в параграфе 6.

Универсальная оценка сверху вида (0.12) для ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (0.1) доказана в параграфе 7.

Оценки снизу вида (0.18) и (0.19) для колмогоровской ε-энтропии аттрактора получены в параграфе 8, используя технику бесконечномерных неустойчивых многообразий и асимптотики для ε-энтропии в пространствах $\mathbb{B}_\sigma$ частотно-модулированных функций, приведенные в параграфе 6.

§5 *Существование аттрактора.*

В этом параграфе мы построим аттрактор уравнения (3.1) в регулярной неограниченной области Ω. Для простоты мы ограничимся лишь автономным случаем, то есть случаем, когда краевое условие u^0 на границе области Ω не зависит от t:

$$u^0(t,x) \equiv u^0(x) \in W_b^{2-1/q,q}(\partial\Omega) \tag{5.1}$$

(см. [82] по поводу исследования уравнений вида (3.1), в случае наличия явной зависимости от времени).

В этом случае разрешающие операторы $\{S_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ уравнения (3.1), определенные по формуле (4.19), образуют полугруппу в фазовом пространстве $\Phi_b := \{u_0 \in W_b^{2,q}(\Omega),\ u_0\big|_{\partial\Omega} = u^0\}$, то есть

$$S_{t_1+t_2} = S_{t_1} \circ S_{t_2}, \quad t_1, t_2 \geq 0. \tag{5.2}$$

Заметим также, что, согласно оценке (3.13),

$$\|S_t u_0\|_{\Phi_b} \leq Q(\|u_0\|_{\Phi_b})e^{-\alpha t} + Q(\|g\|_{L_b^q}) + Q(\|u^0\|_{\Psi_b}) \tag{5.3}$$

для некоторой монотонной функции Q и положительной константы $\alpha > 0$. Поэтому полугруппа (5.2) обладает ограниченным поглощающим множеством K в фазовом пространстве Φ_b, то есть для любого ограниченного подмножества $B \subset \Phi_b$ существует $T = T(B)$, такое что

$$S_t B \subset K, \quad \text{при } t \geq T. \tag{5.4}$$

Более того, в качестве K можно взять шар достаточно большого радиуса в Φ_b. Однако, в отличие от случая ограниченной области Ω, в неограниченной области существование глобального аттрактора полугруппы S_t, порожденной уравнением (3.1)8 в исходном фазовом пространстве Φ_b, накладывает весьма существенные (и неестественные) ограничения на структуру нелинейности f и внешней силы g, которые не выполнены даже в случае простейших уравнений вида (3.1) (см, например, [82], а также примеры в конце этого параграфа). Поэтому, следуя [58], [70], мы будем рассматривать так называемый локально компактный аттрактор полугруппы S_t, который компактен лишь в топологии пространства $\Phi_{loc}(\Omega) := W^{2,q}_{loc}(\overline{\Omega})$ и притягивает ограниченные подмножества Φ_b в топологии пространства Φ_{loc}.

Определение 5.1. Множество $\mathcal{A} \subset \Phi_b$ называется локально компактным аттрактором полугруппы S_t, если выполнены следующие условия:

1) Множество $\mathcal{A}$ ограничено в Φ_b и компактно в Φ_{loc}.

2) Множество $\mathcal{A}$ строго инвариантно относительно полугруппы S_t, то есть $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$ для любого $t \geq 0$.

3) Множество $\mathcal{A}$ является притягивающим для ограниченных подмножеств пространства Φ_b в топологии пространства Φ_{loc}, то есть для любого ограниченного $B \subset \Phi_b$ и любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ в топологии Φ_{loc} существует $T = T(B, \mathcal{O})$, такое что

$$S_t B \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}) \quad \text{при } t \geq T. \tag{5.5}$$

Отметим, что первое условие определения 5.1 может быть переформулировано в следующем виде: $\mathcal{A}$ ограничено в $W^{2,q}_b(\Omega)$ и, для любой ограниченной подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$, сужение $\mathcal{A}\big|_{\Omega_1}$ компактно в $W^{2,q}(\Omega_1)$. Аналогично, третье условие определения 5.1 означает, что, для любого ограниченного $B \subset \Phi_b$, любой ограниченной подобласти $\Omega_1 \subset \Omega$ и любой $W^{2,q}(\Omega_1)$-окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A}\big|_{\Omega_1})$, существует $T = T(B, \Omega_1, \mathcal{O})$, такое что

$$(S_t B)\big|_{\Omega_1} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}\big|_{\Omega_1}),\ t \geq T. \tag{5.6}$$

Следующая теорема гарантирует существование локально компактного аттрактора для уравнения (3.1).

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и пусть, также, справедливо условие* (5.1)*. Тогда полугруппа* $S_t : \Phi_b \to \Phi_b$*, порожденная уравнением* (3.1)*, обладает локально компактным аттрактором* $\mathcal{A}$ *в смысле определения 5.1. Более того, аттрактор* $\mathcal{A}$ *допускает следующее описание:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}\big|_{t=0}, \tag{5.7}$$

где символом $\mathcal{K}$ *обозначено множество всех решений* $u(t)$ *задачи* (3.1)*, определенных и ограниченных при* $t \in \mathbb{R}$ $(u \in L^\infty(\mathbb{R}, \Phi_b))$*.*

Доказательство. Согласно абстрактной теореме о существовании аттракторов полугрупп (см., например, [3]), достаточно проверить следующие условия:

1. Полугруппа S_t обладает в Φ_b ограниченным поглощающим множеством K_0, которое компактно в Φ_{loc}.

2. Сужение оператора S_t на множество K_0 является непрерывным оператором в топологии Φ_{loc} для любого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$.

Проверим первое условие. Действительно, из оценки (5.3) следует, что шар

$$K := \{\|u_0\|_{\Phi_b} \le R\}, \quad R := 2Q(\|u^0\|_{\Psi_b}) + 2Q(\|g\|_{L^q_b}) \tag{5.8}$$

является поглощающим для полугруппы S_t. Однако, это множество, очевидно, не компактно в Φ_{loc}. Для построения компактного поглощающего множества мы воспользуемся, как обычно, сглаживающим свойством для параболических уравнений.

Пусть $G = G(x)$ – решение линейного эллиптического уравнения

$$a\Delta_x G - \lambda_0 G = g, \quad G\big|_{\partial\Omega} = u^0. \tag{5.9}$$

Тогда из предложения 2.4 следует, что $G \in W^{2,q}_b(\Omega)$ и

$$\|G\|_{W^{2,q}_b(\Omega)} \le C\|u^0\|_{W^{2-1/q,q}_b(\partial\Omega)}. \tag{5.10}$$

Введем функцию $w(t) := t(u(t) - G)$, где $u(t) := S_t u_0$ и $u_0 \in K$. Тогда эта функция удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w - a\Delta_x w + \lambda_0 w = h(t) := u(t) - G- \\ - tf(u(t)) - t(L, \nabla_x)u(t), \ w\big|_{t=0} = w\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.11}$$

Из оценки (5.3), учитывая что $u_0 \in K$, получим (см., также, (3.52))

$$\|h\|_{L^\infty([0,1],W_b^{1,q}(\Omega))} \le Q_1(\|u^0\|_{\Psi_b}) + Q_1(\|g\|_{L_b^q}) \tag{5.12}$$

для некоторой монотонной функции Q. Из предложения 2.7 следует теперь, что

$$\|S_1u_0 - G\|_{W_b^{2+\delta,q}(\Omega)} \le R_1 := Q_2(\|u^0\|_{\Psi_b}) + Q_2(\|g\|_{L_b^q}), \tag{5.13}$$

для некоторой монотонной функции Q_2 и некоторого $0 < \delta < 1/q$. Таким образом,

$$S_1K \subset K_0 := G + \{\|u_0\|_{W_b^{2+\delta,q}(\Omega)} \le R_1\} \tag{5.14}$$

и, следовательно, K_0 также является поглощающим множеством полугруппы S_t. Остается заметить, что множество K_0 компактно в Φ_{loc}, так как вложение $W_b^{2+\delta,q} \subset W_{loc}^{2,q}$ компактно. Итак, первое условие абстрактной теоремы о существовании аттрактора проверено.

Проверим второе условие. Для этого нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 5.1. *Пусть Ω – регулярная область, а ϕ – весовая функция экспоненциального роста μ, такая что*

$$\lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = 0. \tag{5.15}$$

Пусть также B – ограниченное подмножество в Φ_b. Тогда топологии, индуцированные на B вложениями $B \subset \Phi_{loc}$ и $B \subset \Phi_{b,\phi}$, совпадают ($\Phi_{b,\phi} := W_{b,\phi}^{2,q} \cap \{u^0\big|_{\partial\Omega} = u^0\}$).

Более того, если $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx < \infty$, то топология, индуцированная вложением $B \subset \Phi_\phi$, также совпадает с топологией Φ_{loc}.

Доказательство. Так как $\Phi_{b,\phi} \subset \Phi_{loc}$, то достаточно проверить лишь, что из сходимости последовательности $u_n \to u_0$ в $\Phi_{loc} \cap B$ следует ее сходимость в $\Phi_{b,\phi} \cap B$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ произвольное фиксированное число. Тогда из условия (5.15) и ограниченности множества B в Φ_b следует, что существует $R_\varepsilon > 0$, такое что

$$\|B, \Omega\backslash B_0^{R_\varepsilon}\|_{b,\phi,2,q} \le \varepsilon/4.$$

Из сходимости $u_0 \to u$ в Φ_{loc} следует, что существует N_ε, такое что при $n > N_\varepsilon$

$$\|u_n - u_0, \Omega \cap B_0^{R_\varepsilon}\|_{b,\phi,2,q} \le \varepsilon/2.$$

Таким образом, при $n > N_\varepsilon$

$$\|u_n - u_0, \Omega\|_{b,\phi,2,q} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon$$

и, следовательно, $u_n \to u_0$ в $\Phi_{b,\phi}(\Omega)$. Первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение доказывается совершенно аналогично. Лемма 5.1 доказана.

Согласно лемме 5.1, для доказательства непрерывности оператора S_t на K_0 в топологии пространства Φ_{loc} достаточно проверить его непрерывность в топологии Φ_ϕ для какой-нибудь весовой функции $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Заметим однако, что непрерывность S_t на B (и даже его липшицевость) в топологии пространства $\Phi_{\phi_{\varepsilon,x_0}}$ немедленно следует из оценки (4.2). Таким образом, второе условие абстрактной теоремы о существовании аттрактора также проверено, и, следовательно полугруппа S_t, порождаемая уравнением (3.1), обладает локально компактным аттрактором $\mathcal{A}$, который представляется в виде

$$\mathcal{A} = \cap_{s\ge 0}[\cup_{t\ge s} S_t K_0]_{\Phi_{loc}}, \tag{5.16}$$

где $[\cdot]_V$ – оператор замыкания в пространстве V. Представление (5.7) также является следствием абстрактной теоремы о существовании аттрактора. Теорема 5.1 доказана.

В заключение этого параграфа мы приведем несколько примеров, показывающих невозможность построения глобального аттрактора в равномерной топологии исходного фазового пространства Φ_b. Для этого нам понадобится следующее предложение.

Предложение 5.1. *Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$ и пусть уравнение* (3.1) *является пространственно-однородным, то есть, пусть g и L не зависят от x. Предположим также, что аттрактор $\mathcal{A}$ задачи* (3.1) *является компактным в пространстве $\Phi_b = W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$\mathcal{A} \subset AP(\mathbb{R}^n). \tag{5.17}$$

Здесь через $AP(\mathbb{R}^n)$ обозначено пространство почти-периодических по Бору функций в $\mathbb{R}^n$ (см. [23]). Таким образом, аттрактор $\mathcal{A}$ состоит из почти-периодических функций по x.

Доказательство. Пусть $u_0 \in \mathcal{A}$. Тогда, по определению, мы должны проверить, что оболочка

$$H(u_0) = \{T_h u_0, h \in \mathbb{R}^n\}_{C_b(\mathbb{R}^n)}, \text{ где } (T_h u_0)(x) = u_0(x+h) \tag{5.18}$$

компактна в пространстве $C_b(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что по условию предложения, уравнение (3.1) пространственно-однородно, поэтому из условия $u_0 \in \mathcal{A}$ следует, что $H(u_0) \subset \mathcal{A}$. Но, по предположению, $\mathcal{A}$ компакт в $W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n)$, а из теоремы вложения следует, что $W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n) \subset C_b(\mathbb{R}^n)$. Поэтому оболочка $H(u_0)$ компактна в пространстве $C_b(\mathbb{R}^n)$. Предложение 5.1 доказано.

Пример 5.1. Отметим, что условие почти-периодичности (5.17) является крайне ограничительным. Например, рассмотрим простейший пример скалярного уравнения Chafee-Infante в $\mathbb{R}^n$

$$\partial_t u = \Delta_x u - u^3 + \alpha^2 u. \tag{5.19}$$

Тогда его положение равновесия

$$u_0(x) = \alpha \tanh\left(\frac{\alpha}{2^{1/2}} x_1\right),$$

очевидно, принадлежит аттрактору $\mathcal{A}$, но не является почти-периодическим. Таким образом, аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения (5.19) не является компактным в $W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n)$.

Следующий пример показывает, что даже в случае, когда аттрактор $\mathcal{A}$ оказывается компактным в $W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n)$, притяжения к нему в равномерной топологии $W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ может не быть.

Пример 5.2. Пусть

$$f(u) := \begin{cases} (u+1)^5 & \text{если } u < -1, \\ 0 & \text{если } u \in [-1,1], \\ (u-1)^5 & \text{если } u > 1. \end{cases} \tag{5.20}$$

Рассмотрим следующее скалярное уравнение в $\mathbb{R}^1$:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u - f(u), \quad u\big|_{\partial\Omega} = u_0. \tag{5.21}$$

Тогда, как нетрудно проверить, уравнение (5.21) имеет вид (3.1) (в качестве λ_0 можно взять любое положительное число) и удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1. Таким образом, уравнение (5.21) обладает локально компактным аттрактором $\mathcal{A}$. Более того, используя решения обыкновенного уравнения

$$y' = -f(y)$$

в качестве барьерных функций для уравнения (5.21), нетрудно показать, что $\|\mathcal{A}\|_{C_b(\mathbb{R}^n)} \le 1$, следовательно, всякое решение $u(t) \in \mathcal{K}$ уравнения (5.21), лежащее на аттракторе, является одновременно и решением линейного уравнения

$$\partial_t u = \partial_x^2 u. \tag{5.22}$$

Таким образом, по теореме Лиувилля, это решение является константой $u_0 \in [-1, 1]$. Итак,

$$\mathcal{A} = \{u_0 \ : \ u_0 \in [-1, 1]\}. \tag{5.23}$$

В частности, аттрактор $\mathcal{A}$ компактен в пространстве $W_b^{2,q}(\mathbb{R}^1)$.

Рассмотрим теперь решение $u(t)$ уравнения (5.21) с начальным условием

$$u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0, \\ -1 & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда, согласно принципу максимума, $\|u(t)\|_{C_b(\mathbb{R}^1)} \le 1$, а значит, $u(t)$ – решение уравнения (5.22). Это решение может быть найдено в явном виде

$$u(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \int_0^\infty \left(e^{-(x-y)^2/2t} - e^{-(x+y)^2/2t} \right) dy \tag{5.24}$$

и выражено через интеграл вероятностей

$$u(t, \alpha t^{1/2}) = \operatorname{erf}(\alpha), \quad \operatorname{erf}(\alpha) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\alpha e^{-y^2/2}\, dy. \tag{5.25}$$

Таким образом, решение $u(t,x)$ постоянно на параболах $x = \alpha t^{1/2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и равно $\operatorname{erf}(\alpha)$. Заметим также, что

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty} u(t, \alpha t^{1/2}) = \pm 1$$

и, следовательно,

$$\operatorname{dist}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}(u(t), \mathcal{A}) \equiv 1.$$

Поэтому аттрактор $\mathcal{A}$ не притягивает траекторию $u(t)$ в равномерной топологии $W_b^{2,q}(\Omega)$.

§6 *Колмогоровская ε-энтропия множеств в функциональных пространствах.*

В этом параграфе мы напомним определение колмогоровской ε-энтропии множества в метрическом пространстве (см., например, [14] для детального изучения этого понятия) и приведем оценки сверху и снизу для ε-энтропии типичных множеств в функциональных пространствах, которые будут использованы в дальнейшем для оценки ε-энтропии аттрактора уравнения (3.1).

Определение 6.1. Пусть $\mathbb{M}$ – метрическое пространство и пусть K – предкомпактное множество в нем. Для любого заданного $\varepsilon > 0$ определим $N_\varepsilon(K) = N_\varepsilon(K, \mathbb{M})$ как минимальное число ε-шаров в $\mathbb{M}$ достаточное для покрытия K (это число конечно, согласно критерию Хаусдорфа). По определению, колмогоровской ε-энтропией множества K в $\mathbb{M}$ называется следующее число:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(K) = \mathbb{H}_\varepsilon(K, \mathbb{M}) \equiv \ln N_\varepsilon(K). \tag{6.1}$$

Пример 6.1. Пусть K – компактное n-мерное липшицево многообразие в $\mathbb{M}$. Тогда, как нетрудно показать,

$$C_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \le N_\varepsilon(K) \le C_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \tag{6.2}$$

и, следовательно,

$$\mathbb{H}_\varepsilon(K) = (n + \overline{\overline{o}}(1)) \ln \frac{1}{\varepsilon} \tag{6.3}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Этот пример оправдывает следующее определение.

Определение 6.2. Фрактальной (энтропийной) размерностью множества $K \subset\subset \mathbb{M}$ называется следующее число:

$$\dim_F(K) = \dim_F(K, \mathbb{M}) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(K)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{6.4}$$

Заметим, что фрактальная размерность $\dim_F(K) \in [0, \infty]$ определена для любого компактного множества в $\mathbb{M}$, но может быть не целой, если K не является многообразием.

Пример 6.2. Пусть $\mathbb{M} = [0, 1]$ и пусть K – двоичное канторово множество в $\mathbb{M}$. Тогда, как нетрудно показать,

$$C_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \le N_\varepsilon(K) \le C_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \quad , \quad d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \tag{6.5}$$

и, следовательно, $\dim_F(K) = d = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Рассмотрим теперь примеры вычисления ε-энтропии бесконечномерных множеств в пространствах функций.

Следующие два примера демонстрируют типичное поведение ε-энтропии компактных множеств в пространствах аналитических функций.

Пример 6.3. Пусть K – множество всех аналитических функций f в шаре $B(R)$ радиуса $R > 1$ в $\mathbb{C}^n$, таких что $\|f\|_{L^\infty(B(R))} \le 1$ и пусть $\mathbb{M} := C(B^{Re})$, где $B^{Re} = \{z \in \mathbb{C}^n \ : \operatorname{Im} z_i = 0\, , |z| \le 1\}$. Таким образом, K состоит из функций из $C(B^{Re})$, которые могут быть продолжены до аналитической функции в шаре $B(R) \subset \mathbb{C}^n$, и C-норма которых не превосходит единицы. Тогда

$$C_1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1} \le \mathbb{H}_\varepsilon(K, \mathbb{M}) \le C_2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}. \tag{6.6}$$

Доказательство этой оценки приведено, например, в [14].

Пример 6.4. Пусть $\mathbb{M}$ то же самое, что и предыдущем примере и пусть K – множество функций f из $\mathbb{M}$, допускающих продолжение до целой функции $\widehat{f}$ экспоненциального роста в $\mathbb{C}^n$, то есть

$$|\widehat{f}(z)| \le K_1 e^{K_2|z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{6.7}$$

Тогда, как показано в [14],

$$C_1 \frac{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^n} \le \mathbb{H}_\varepsilon(K) \le C_2 \frac{\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\ln\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^n}. \tag{6.8}$$

Следующий пример демонстрирует типичное поведение ε-энтропии компактных множеств в соболевских пространствах в ограниченных областях.

Пример 6.5. Пусть Ω – гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и

$$W^{l_1,p_1}(\Omega) \subset\subset W^{l_2,p_2}(\Omega)\ ,\ 0 \le l_i < \infty,\ 1 \le p_i \le \infty,\ l_1 > l_2,$$

то есть, согласно теореме вложения, $\frac{l_1}{n} - \frac{1}{p_1} > \frac{l_2}{n} - \frac{1}{p_2}$.

Пусть теперь $\mathbb{M} = W^{l_2,p_2}(\Omega)$ и K – единичный шар в пространстве $W^{l_1,p_1}(\Omega)$. Тогда

$$C_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{l_1-l_2}} \le \mathbb{H}_\varepsilon(K) \le C_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{l_1-l_2}}. \tag{6.9}$$

Доказательство этих оценок приведено, например, в [5] и [30].

Следующее предложение описывает зависимость константы C_2 в правой части оценки (6.9) от области Ω в некотором частном случае, которая будет существенно использована в дальнейшем для оценки сверху энтропии аттрактора.

Предложение 6.1. *Пусть Ω – регулярная область, $R > 0$ – положительное число, $1 < q < \infty$, $x_0 \in \Omega$, и пусть $\mathbb{M} = L^q_b(\Omega \cap B^R_{x_0})$, а $K = B(1,0,W^{1,q}_b)$ единичный шар в пространстве $W^{1,q}_b(\Omega \cap B^{R+1}_{x_0})$. Тогда*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(B(1,0,W^{1,q}_b), L^q_b(\Omega \cap B^R_{x_0})) \le C_2 \operatorname{vol}(\Omega \cap B^{R+1}_{x_0}) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n, \tag{6.10}$$

где $\mathrm{vol}(V)$ – n-*мерный объем области* V*. Более того, константа* C_2 *в* (6.10) *не зависит от* R *и* x_0*.*

Схема доказательства. Для простоты мы ограничимся выводом оценки (6.10) в частном случае $q > n$, хотя аналогичным образом можно доказать ее и в общем случае.

Заметим, что, так как $L^\infty \subset L^q_b$, то достаточно доказать следующую оценку для L^∞-нормы

$$\mathbb{H}_\varepsilon(B(1,0,W^{1,q}_b), L^\infty(\Omega \cap B^R_{x_0})) \le C_3 \,\mathrm{vol}(\Omega \cap B^{R+1}_{x_0}) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n. \tag{6.11}$$

Более того, умножая функции из K на срезающую функцию $\phi_R(x)$, равную единице при $x \in B^R_{x_0}$ и нулю вне шара $B^{R+1}_{x_0}$, мы получим оператор Π_1 продолжения функций из K до функций из $W^{1,q}_b(\Omega)$, такой что

$$\Pi_1 u\big|_{\Omega \cap B^R_{x_0}} \equiv u\big|_{\Omega \cap B^R_{x_0}}, \quad \|\Pi_1 u, \Omega\|_{b,1,q} \le C\|u, \Omega \cap B^{R+1}_{x_0}\|_{b,1,q}, \tag{6.12}$$

где константа C не зависит от x_0 и R. Напомним теперь, что область Ω предполагается регулярной, то, как нетрудно показать (например, аналогично доказательству предложения 2.1), существует оператор продолжения Π_2 функций из $W^{1,q}_b(\Omega)$ в пространство $W^{1,q}_b(\mathbb{R}^n)$, такой что

$$\Pi_2 u\big|_\Omega \equiv u\big|_\Omega, \quad \|\Pi_1 u, \mathbb{R}^n\|_{b,1,q} \le C\|u, \Omega\|_{b,1,q}. \tag{6.13}$$

Поэтому достаточно доказать оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,W^{1,q}_b(\mathbb{R}^n)), L^\infty(\Omega \cap B^R_{x_0})\right) \le C_4 \,\mathrm{vol}(\Omega \cap B^{R+1}_{x_0}) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \tag{6.14}$$

с константой C_4, не зависящей от R (здесь и далее символ $B(r, v_0, V)$ означает шар радиуса r в пространстве V с центром в точке v_0).

Заметим далее, что из регулярности области Ω нетрудно вывести, что

$$\mathrm{vol}(\mathcal{O}_\delta(\partial\Omega \cap B^R_{x_0})) \le C_\delta \,\mathrm{vol}(\Omega \cap B^{R+1}_{x_0}), \tag{6.15}$$

где $\delta > 0$ – достаточно малое положительное число, $\mathcal{O}_\delta(V)$ – δ-окрестность множества V, а константа C_δ не зависит от R и x_0.

Рассмотрим теперь решетку $r\mathbb{Z}^n$, где r – достаточно малое положительное число, и соответствующее ей разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на кубы $\mathcal{C}_{x_j} := x_j + (-r,r)^n$, $x_j \in r\mathbb{Z}^n$. Тогда из оценки (6.15) следует, что

$$N_r(R) := \#\{\mathcal{C}_{x_j} : x_j \in r\mathbb{Z}^n,\ \mathcal{C}_{x_j} \cap (\Omega \cap B^R_{x_0}) \neq \varnothing\} \leq \\ \leq C_r \operatorname{vol}(\Omega \cap B^{R+1}_{x_0}) \quad (6.16)$$

с константой C_r, не зависящей от $x_0 \in \Omega$ и $R > 0$.

Заметим теперь, что из условия $q > n$ и оценки (6.10) следует, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(B(1,0,W^{1,q}(\mathcal{C}_{x_j})), L^\infty(C_{x_j})) \leq C_r \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n, \qquad (6.17)$$

где C не зависит от x_j. Поэтому, из оценок (6.16), (6.17) и субаддитивности ε-энтропии в метрике L^∞ следует

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,W^{1,q}_b(\mathbb{R}^n)), L^\infty(\Omega \cap B^R_{x_0})\right) \leq N_r(R) C_r \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n \leq \\ \leq C'_r \operatorname{vol}(\Omega \cap B^{R+1}_{x_0}) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n. \quad (6.18)$$

Оценка (6.14) доказана. Предложение 6.1 доказано.

Следующий класс функциональных пространств будет играть центральную роль при построении бесконечномерных неустойчивых многообразий и оценке снизу ε-энтропии аттрактора уравнения (3.1).

Определение 6.3. Обозначим через $\mathbb{B}_\sigma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{B}_\sigma(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ подпространство $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, состоящее из функций ϕ, преобразование Фурье $\widehat{\phi}$ которых имеют компактный носитель и удовлетворяют условию

$$\operatorname{supp} \widehat{\phi} \subset [-\sigma, \sigma]^n \qquad (6.19)$$

(см., например, [14] или [45]).

Пусть также $\xi \in \mathbb{R}^n$. Аналогично (6.19), определим пространство $\mathbb{B}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ как подпространство $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, состоящее из функций ϕ, преобразование Фурье $\widehat{\phi}$ которых имеют компактный носитель и удовлетворяют условию

$$\operatorname{supp} \widehat{\phi} \subset \xi + [-\sigma, \sigma]^n. \qquad (6.20)$$

Более того, обозначим через $\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)$ пространство вещественных частей функций из $\mathbb{B}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$

$$\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n) := \{\operatorname{Re} u,\ u \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\} \subset \mathbb{B}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) + \mathbb{B}_{\sigma,-\xi}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}). \tag{6.21}$$

Как известно (см., например, [45]), каждая функция $\phi \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ допускает продолжение до целой функции $\widetilde{\phi}(z) \in A(\mathbb{C}^n)$, которая удовлетворяет оценке

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\widetilde{\phi}(x+iy)| \le C\|\phi,\mathbb{R}^n\|_{0,\infty} \cdot e^{(\sigma+|\xi|)\sum_{i=1}^n |y_i|}. \tag{6.22}$$

Пример 6.6. Пусть $K = B(1,0,\mathbb{B}_\sigma)$, $\mathbb{M} = C(B^R_0)$. Тогда

$$\mathbb{H}_\varepsilon(B(1,0,\mathbb{B}_\sigma), C_b(B^R_0)) \le C(R + K\ln\frac{1}{\varepsilon})^n \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{6.23}$$

где C и K не зависят от R.

Доказательство оценки (6.23) приведено, например, в [82].

В заключение этого параграфа мы получим две оценки снизу для ε-энтропии в примере 6.6.

Предложение 6.2. *Пусть $R \ge R_0$ and $\varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)), C_b(B^R_0)\right) \ge CR^n \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{6.24}$$

где константа C не зависит от R и ε.

Доказательство. Оценка (6.24) для случая пространств $\mathbb{B}_\sigma(\mathbb{R}^n)$ была получена в [14]. Для удобства читателя, мы приведем ниже ее доказательство, обобщенное на случай пространства $\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)$.

Для каждого $k = (k_1,\cdots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ определим функцию

$$\phi_k(z) = \cos(\xi.(z - \frac{2\pi k}{\sigma}))\mathit{\Pi}^n_{i=1}\frac{\sin^2\left(\frac{\sigma z_i}{2} - \pi k_i\right)}{\left(\frac{\sigma z_i}{2} - \pi k_i\right)^2}. \tag{6.25}$$

Нетрудно проверить, что $\phi_k \in \mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть L_N – подпространство $\mathbb{B}_{\sigma,\xi}$, порожденное функциями $\phi_k(z)$, $k \in [-N,N]^n \equiv K_N$, то есть L_N состоит из функций вида

$$u(z) = \sum_{k\in K_N} a_k\phi_k(z), \quad a_k \in \mathbb{R}. \tag{6.26}$$

Доказательство предложения 6.2 базируется на следующих двух простых леммах

Лемма 6.1. *Справедлива следующая оценка:*

$$\sup_{k\in K_N}|a_k| \le \|u,\mathbb{R}^n\|_{0,\infty} \le C\sup_{k\in K_N}|a_k|, \quad u\in L_N, \tag{6.27}$$

где константа C не зависит от N.

Действительно, левая часть неравенства (6.27) немедленно следует из равенства $u(\frac{2\pi k}{\sigma}) = a_k$, а его правая часть следует из очевидной оценки

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\phi_k(x)| \le C < \infty,$$

в которой константа C не зависит от $x\in\mathbb{R}^n$.

Лемма 6.2. *Пусть $N\ge N_0$ и $R\ge bN$ для некоторого фиксированного $b\ge 1$. Тогда*

$$\|u,B_0^R\|_{0,\infty} \ge \frac{1}{2}\|u,\mathbb{R}^n\|_{0,\infty}, \tag{6.28}$$

для любой $u\in L_N$.

Доказательство. Мы приведем ниже вывод оценки (6.28) лишь для случая $n=1$. Оценка (6.28) в общем случае доказывается аналогично. Пусть $u\in L_N$. Тогда, согласно лемме 6.1,

$$\|u,|z|>R\|_{0,\infty} \le \sup_{k\in K_N}\left\{|a_k|\right\}\cdot\sum_{k\in K_N}|\phi_k(x)| \le$$
$$\le C\|u,\mathbb{R}^1\|_{0,\infty}\frac{2N+1}{(R-lN)^2} \le \frac{1}{2}\|u,\mathbb{R}^1\|_{0,\infty}$$

при $R\ge 2lN$, $l=\frac{2\pi}{\sigma}$, и достаточно большом N. Лемма 6.2 доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство предложения 6.2. Пусть R – достаточно большое число (чтобы выполнялись условия леммы 6.2), а $\varepsilon>0$ достаточно мало. Определим $N=\left[\frac{R}{b}\right]+1$, где b такое же, как и лемме 6.2 и рассмотрим подпространство L_N. Разобьем отрезок $[-\frac{1}{C},\frac{1}{C}]$, где C такое же, как и в лемме 6.1, точками $a_j=4\varepsilon j$, $j=-[\frac{1}{4C\varepsilon}],\cdots,[\frac{1}{4C\varepsilon}]$ и введем функции

$$\phi_J(z) = \sum_{k\in K_N}a_{J(k)}\phi_k(z), \tag{6.29}$$

где $J : [-N, \cdots, N]^n \to \{-[\frac{1}{4C\varepsilon}], \cdots, [\frac{1}{4C\varepsilon}]\}$ – произвольное отображение.

Заметим, что, согласно лемме 6.1, $\phi_J(z) \in B(1, 0, \mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_{\sigma,\xi})$, а, согласно лемме 6.2,

$$\|\phi_{J_1} - \phi_{J_2}, B_0^R\|_{0,\infty} \geq 2\varepsilon,$$

если $J_1 \neq J_2$. Таким образом,

$$N_\varepsilon(B(1, 0, \mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n))) \geq \left(2[\frac{1}{4C\varepsilon}] + 1\right)^{(2N+1)^n} \tag{6.30}$$

и, следовательно,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1, 0, \mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)), C(B_0^R)\right) \geq (2N+1)^n \ln\frac{C}{2\varepsilon} \geq C_1 R^n \ln\frac{1}{\varepsilon}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Предложение 6.2 доказано.

Таким образом, согласно (6.24), оценка (6.23) является точной при $R \sim \ln\frac{1}{\varepsilon}$ и при $R \gg \ln\frac{1}{\varepsilon}$. Однако, при $R \ll \ln\frac{1}{\varepsilon}$ оценка снизу (6.24) существенно отличается от оценки сверху (6.23). Следующее предложение показывает, что оценка (6.23) является точной (с точностью до двойного логарифма по $1/\varepsilon$) и в этом случае

Предложение 6.3. *Существует $C > 0$, такое что, для достаточно малого $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1, 0, \mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)), C(B_0^1)\right) \geq C\left(\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon})^n}\right)^{n+1}. \tag{6.31}$$

Доказательство. Доказательство этой оценки базируется на оценке (6.24) и следующем аналоге классической леммы Адамара.

Лемма 6.3. *Пусть $D_n^R = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i| \leq R\}$ – полидиск в $\mathbb{C}^n$. Тогда для любой целой функции $u \in A(\mathbb{C}^n)$ и для любых r и R, таких что $4 < r < R$, справедлива оценка*

$$\|u, D_n^{r/4}\|_{0,\infty} \leq \|u, [-1, 1]^n\|^{\beta}_{0,\infty} \|u, D_n^R\|^{1-\beta}_{0,\infty}, \tag{6.32}$$

где $\beta := \left(1 - \frac{\ln r}{\ln R}\right)^n$.

Доказательство. Мы выведем оценку (6.32) только для случая $n = 1$ (Общий случай выводится из случая $n = 1$ по индукции.)

Напомним, что из классической леммы Адамара следует оценка

$$\|u, \{|z| = r\}\|_{0,\infty} \le \|u, \{|z| = 1\}\|_{0,\infty}^{1-\beta} \cdot \|u, \{|z| = R\}\|_{0,\infty}^{\beta} \tag{6.33}$$

для любой $u \in A(\overline{D_1^R \backslash D_1^1})$. Применив конформное преобразование Жуковского $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ к кольцу $\{1 \le |z| \le R\}$, получим из (6.33), что для любой целой функции $u \in A(\mathbb{C})$ справедлива оценка

$$\|u, E(r)\|_{0,\infty} \le \|u, [-1,1]\|_{0,\infty}^{\beta} \|u, E(R)\|_{0,\infty}^{1-\beta}, \tag{6.34}$$

где $E(r) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$.

Оценка (6.32) при $n = 1$ следует теперь из (6.34) и очевидного вложения

$$D_1^{r/4} \subset E(r) \subset D_1^r.$$

Лемма 6.3 доказана.

Лемма 6.4. *Пусть $k > 1$, $R > 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), L^\infty(B_0^{kR})\right) \le Ck^n \mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), L^\infty(B_0^R)\right), \tag{6.35}$$

где константа C зависит только от n.

Действительно, оценка (6.35) немедленное следствие очевидной оценки

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), L^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)\right) \le \mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), L^\infty(\Omega_1)\right) + \\ + \mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), L^\infty(\Omega_2)\right) \tag{6.36}$$

(для любых Ω_i, таких что $\Omega_1 \cap \Omega_1 = \varnothing$) и инвариантности $B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi})$ относительно пространственных сдвигов $\{T_h,\ h \in \mathbb{R}^n\}$.

Теперь мы готовы завершить вывод оценки (6.31). Для этого зафиксируем произвольное $\theta > 1$ и выберем $R = r^\theta$ в (6.32). Тогда, использовав (6.22), получим

$$\|u, B_0^{r/4}\|_{0,\infty} \le e^{2(\sigma+|\xi|)r^\theta} \|u, [-1,1]^n\|_{0,\infty}^{(1-1/\theta)^n} \tag{6.37}$$

для любых $u \in B(2,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n))$.

Из оценки (6.37) следует, что

$$\mathbb{H}_{\delta(\varepsilon)}\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), L^\infty(B_0^{r/4})\right) \le \mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), L^\infty([-1,1]^n)\right), \quad (6.38)$$

где $\delta(\varepsilon) := e^{2(\sigma+|\xi|)r^\theta}\varepsilon^{(1-1/\theta)^n}$. Оценивая левую часть (6.38) при помощи (6.24), получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), C([-1,1]^n)\right) \ge$$
$$\ge Cr^n\left((1-\frac{1}{\theta})^n \ln\frac{1}{\varepsilon} - 2(\sigma+|\xi|)r^\theta\right). \quad (6.39)$$

Выбирая $r = r(\theta)$ в (6.39) оптимальным образом:

$$r(\theta) := (1-\frac{1}{\theta})^{n/\theta}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\theta}\left(\frac{n}{2(n+\theta)(\sigma+|\xi|)}\right)^{1/\theta}$$

и предполагая, что $1 < \theta < 2$, получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), C([-1,1]^n)\right) \ge C'\left((1-\frac{1}{\theta})^n \ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1+n/\theta}. \quad (6.40)$$

Фиксировав теперь $\theta = \theta(\varepsilon)$ так, чтобы $1-\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\ln\ln 1/\varepsilon}$ и подставив это выражение в (6.40), окончательно получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}), C([-1,1]^n)\right) \ge$$
$$\ge C_1\left(\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon})^n}\right)^{n+1}\cdot\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-n/\ln\ln 1/\varepsilon}\cdot\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n^2/\ln\ln 1/\varepsilon} \ge$$
$$\ge C_2\left(\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon})^n}\right)^{n+1}. \quad (6.41)$$

Оценка (6.31) немедленно следует теперь из (6.41) и леммы 6.4. Предложение 6.3 доказано.

Следствие 6.1. *Для любого $\delta > 0$ существует $C_\delta > 0$, такое что*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)), C(B^1_0)\right) \geq C_\delta \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1-\delta}. \tag{6.42}$$

Замечание 6.1. Отметим, что (6.42) не выполняется при $\delta = 0$. Действительно, согласно (6.24), множество $B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi})$ является подмножеством класса функций, рассмотренных в примере 6.4. Тогда, согласно (6.8),

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(B(1,0,\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n)), C(B^1_0)\right) \leq C\frac{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}}{\left(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n}}. \tag{6.43}$$

§7 *Оценка сверху ε-энтропии аттрактора.*

В этом параграфе мы получим ряд оценок для колмогоровской ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (3.1). Напомним, что аттрактор $\mathcal{A}$ не является, вообще говоря, компактным в равномерной топологии пространства $W^{2,q}_b(\Omega)$, но его сужения $\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}$ на любой шар $B^R_{x_0}$ компактны в соответствующем пространстве. Поэтому, следуя [82], мы будем изучать энтропию $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}})$ в зависимости от трех параметров $x_0 \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ и $R > 0$. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и пусть*

$$\mathrm{vol}_{\Omega,x_0}(R) = \mathrm{vol}(\Omega \cap B^R_{x_0}). \tag{7.1}$$

Тогда, для любого $R \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$, справедлива оценка

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}, W^{2,q}_b(\Omega \cap B^R_{x_0})\right) \leq C\,\mathrm{vol}_{\Omega,x_0}(R + K\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon})\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}, \tag{7.2}$$

в которой $\ln_+ z = \ln z$, если $z \geq 1$ и $\ln_+ z = 0$, если $z < 1$, а константы C, K и R_0 не зависят от R и $x_0 \in \Omega$.

Доказательство. Фиксируем $R > 0$ и $x_0 \in \Omega$ и введем весовую функцию

$$\phi(x) := \phi_{1,B^{R+1}_{x_0}}(x) = e^{-\operatorname{dist}(x,B^{R+1}_{x_0})}. \tag{7.3}$$

Тогда $\phi(x)$ – весовая функция экспоненциального роста 1, удовлетворяющая (1.5) с константой $C_\phi = 1$. Заметим также, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}, W^{2,q}_b(\Omega\cap B^R_{x_0}) \right) \le \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{b,\phi}(\Omega) \right). \tag{7.4}$$

Таким образом, вместо оценки энтропии сужения $\mathcal{A}\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}$, мы будем оценивать энтропию аттрактора в весовом соболевском пространстве $W^{2,q}_{b,\phi}(\Omega)$.

Пусть теперь $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – произвольные два решения уравнения (3.1), лежащие на аттракторе $\mathcal{A}$. Тогда, согласно (4.11) и (1.19)

$$\|u_1(1) - u_2(1)\|_{W^{2,q}_{b,\phi}(\Omega)} \le C\|u_1(0) - u_2(0)\|_{L^q_{b,\phi}(\Omega)}, \tag{7.5}$$

где константа C не зависит $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$ и параметров R и x_0 (так как весовая функция ϕ удовлетворяет условию (1.5) равномерно по x_0 и R). Оценка (7.5), вместе с инвариантностью аттрактора относительно полугруппы S_t, позволяет заключить, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{b,\phi}(\Omega) \right) \le \mathbb{H}_{\varepsilon/(2C)} \left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi}(\Omega) \right). \tag{7.6}$$

Оценки (7.4) и (7.6) сводят доказательство оценки (7.2) к оценке ε-энтропии аттрактора в пространстве $L^q_{b,\phi}(\Omega)$. Для этого нам понадобится следующее рекуррентное соотношение:

Лемма 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда*

$$\mathbb{H}_{\varepsilon/2} \left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi} \right) \le \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi} \right) + C' \operatorname{vol}_{\Omega,x_0}(R + L \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon}), \tag{7.7}$$

где константы C, L и R_0 не зависят от R, ε and x_0.

Доказательство. Пусть $\{B(\varepsilon, u^i_0, L^q_{b,\phi}),\ i = 1, \cdots, N_0(\varepsilon)\}$ – некоторое покрытие аттрактора ε-шарами пространства $L^q_{b,\phi}(\Omega)$, такое что $u^i_0 \in \mathcal{A}$. Тогда из оценки (7.5) и очевидного вложения $W^{2,q} \subset W^{1,q}$ следует, что система $\{B(C\varepsilon, S_1 u^i_0, W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega)),\ i = 1, \cdots, N_0(\varepsilon)\}$ $C\varepsilon$-шаров пространства $W^{1,q}_{b,\phi}$ покрывает аттрактор $\mathcal{A}$.

Напомним, что шар $B(C\varepsilon, S_1u_0^i, W^{1,q}_{b,\phi}) \cap \mathcal{A}$ компактен в $L^q_{b,\phi}(\Omega)$ (см. лемму 5.1), и следовательно, может быть покрыт конечным числом $\varepsilon/4$-шаров в метрике $L^q_{b,\phi}$. Пусть

$$M(\varepsilon) = \max\nolimits_i N_{\varepsilon/4}\left(\mathcal{A} \cap B(C\varepsilon, S_1u_0^i, W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega)), L^q_{b,\phi}(\Omega)\right). \tag{7.8}$$

Покроем теперь каждый шар $\mathcal{A} \cap B(C\varepsilon, S_1u_0^1, W^{1,q}_{b,\phi})$ $M(\varepsilon)$ шарами пространства $L^q_{b,\phi}(\Omega)$ радиуса $\varepsilon/4$. Таким образом, мы построили $\varepsilon/4$-покрытие аттрактора с числом шаров, не превосходящим $N(\varepsilon)M(\varepsilon)$. Увеличивая вдвое радиусы шаров, мы можем считать без ограничения общности, что их центры опять принадлежат аттрактору. Следовательно,

$$\mathbb{H}_{\varepsilon/2}\left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi}(\Omega)\right) \le \mathbb{H}_{\varepsilon}\left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi}(\Omega)\right) + \ln M(\varepsilon). \tag{7.9}$$

Поэтому, для завершения доказательства леммы, достаточно оценить величину (7.8).

Напомним, что аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения (3.1) ограничен в $W^{2,q}_b(\Omega)$, поэтому $\|\mathcal{A}, \Omega\|_{b,\phi,1,q} \le K_1$ Следовательно,

$$\|\mathcal{A}, \Omega \backslash B^{R(\varepsilon)}_{x_0}\|_{1,b,q} \le \varepsilon/8 \tag{7.10}$$

при $R(\varepsilon) := R + 1 + q\ln_+ \frac{8K_1}{\varepsilon}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} M(\varepsilon) \le \max\nolimits_i N_{\varepsilon/4}\left(\mathcal{A} \cap B(C\varepsilon, S_1u_0^i, W^{1,q}_{b,\phi}), L^q_{b,\phi}\right) \le \\ \max\nolimits_i N_{\varepsilon/4}\left(\mathcal{A} \cap B(C\varepsilon, S_1u_0^i, W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega), L^q_{b,\phi}(\Omega \cap B^{R(\varepsilon)}_{x_0})\right) \\ \le N_{\varepsilon/4}\left(B(C\varepsilon, 0, W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega)), L^q_{b,\phi}(\Omega \cap B^{R(\varepsilon)}_{x_0})\right) \le \\ \le N_{1/(4C)}\left(B(1, 0, W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega)), L^q_{b,\phi}(\Omega \cap B^{R(\varepsilon)}_{x_0})\right). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Таким образом, остается оценить ε-энтропию единичного шара пространства $W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega)$ в метрике $L^q_{b,\phi}(\Omega \cap B^{R(\varepsilon)}_{x_0})$. Для этого нам понадобится следующее предложение.

Предложение 7.1. *Пусть* $F : u \to \phi^{-1/q}u$. *Тогда* F *осуществляет линейный изоморфизм между* $L^q_b(\Omega\cap B^R_{x_0})$ *и* $L^q_{b,\phi}(\Omega\cap B^R_{x_0})$, *а также между* $W^{1,q}_b(\Omega\cap B^R_{x_0})$ *и* $W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega\cap B^R_{x_0})$. *Более того,*

$$C_1\|u,\Omega\cap B^{R_1}_{x_0}\|_{b,\phi,i,q}\le\|Fu,\Omega\cap B^{R_1}_{x_0}\|_{b,i,q}\le C_2\|u,\Omega\cap B^{R_1}_{x_0}\|_{b,\phi,i,q} \quad (7.12)$$

где $i=0,1$, *а константы* C_1 *and* C_2 *не зависят от* R, R_1 *и* x_0.

Доказательство. Рассмотрим случай $i=1$ (случай $i=0$ является тривиальным). Пусть $\psi(x)=\phi^{-1/q}(x)$. Тогда, используя очевидную оценку $|\nabla_x\psi(x)|\le q^{-1}\psi(x)$, мы получим, что

$$\begin{aligned}
&|\psi(x)u(x)|^q+|\nabla_x(\psi(x)u(x)|^q\le\\
&\quad\le\phi^{-1}(x)|u(x)|^q+2^q\left(|\nabla_x\psi(x)|^q|u(x)|^q+\phi^{-1}(x)|\nabla_xu(x)|^q\right)\le\\
&\quad\quad\le\phi^{-1}(x)\left([(2/q)^q+1]|u(x)|^q+2^q|\nabla_xu(x)|^q\right)\le\\
&\quad\quad\quad\le 2^q\phi^{-1}(x)(|u(x)|^q+|\nabla_xu(x)|^q).
\end{aligned}\quad (7.13)$$

Аналогично,

$$|\psi(x)u(x)|^q+|\nabla_x(\psi(x)u(x)|^q\ge 2^{-q}\phi^{-1}(x)\left(|u(x)|^q+|\nabla_xu(x)|^q\right). \quad (7.14)$$

Оценка (7.12) в случае $i=1$ является немедленным следствием неравенств (7.13) и (7.14). Предложение 7.1 доказано.

Согласно предложению 7.1, для оценки ε-энтропии единичного шара в весовых пространствах, достаточно оценить его энтропию в невесовых пространствах $L^q_b(\Omega\cap B^{R(\varepsilon)}_{x_0})$, то есть

$$\begin{aligned}
M(\varepsilon)&\le N_{1/(4C)}\left(B(1,0,W^{1,q}_{b,\phi}(\Omega),L^q_{b,\phi}(\Omega\cap B^{R(\varepsilon)}_{x_0})\right)\le\\
&\le N_{1/(4CC')}\left(B(1,0,W^{1,q}_b(\Omega)),L^q_b(\Omega\cap B^{R(\varepsilon)}_{x_0})\right).
\end{aligned}\quad (7.15)$$

Применив оценку (6.10) к правой части неравенства (7.15), окончательно получим

$$\ln M(\varepsilon)\le C_3\,\mathrm{vol}_{\Omega,x_0}\left(R+1+q\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}\right). \quad (7.16)$$

Лемма 7.1 доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 7.1. Действительно, пусть $\varepsilon_0 > 0$, такое что $\mathcal{A} \subset B(\varepsilon_0, 0, L^q_b(\Omega))$. Тогда

$$\mathbb{H}_{\varepsilon_0}\left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi_{R,x_0}}(\Omega)\right) = 0$$

для любых R и x_0. Проитерировав оценку (7.7) k раз, начав с $\varepsilon = \varepsilon_0$, будем иметь

$$\mathbb{H}_{\varepsilon_0/2^k}\left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi}(\Omega)\right) \le Ck \operatorname{vol}_{\Omega,x_0}\left(R + L\ln\frac{R_0 2^k}{\varepsilon_0}\right). \tag{7.17}$$

Пусть теперь $0 < \beta < \varepsilon_0$ произвольно. Вычислим $k = k(\beta) \in \mathbb{N}$ из неравенства

$$\frac{\varepsilon_0}{2^{k-1}} \ge \beta \ge \frac{\varepsilon_0}{2^k}, \quad \text{следовательно,} \quad 2^k \le \frac{2\varepsilon_0}{\beta}. \tag{7.18}$$

Тогда из оценок (7.16) и (7.17) следует, что

$$\mathbb{H}_{\beta}\left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi}\right) \le \mathbb{H}_{\varepsilon_0/2^k}\left(\mathcal{A}, L^q_{b,\phi}\right) \le$$
$$\le Ck \operatorname{vol}_{\Omega,x_0}\left(R + L\ln_+\frac{R_0 2^k}{\varepsilon_0}\right) \le C_1 \operatorname{vol}_{\Omega,x_0}\left(R + L\ln_+\frac{R_0'}{\beta}\right)\ln_+\frac{R_0'}{\beta} \tag{7.19}$$

для некоторых констант C_1, L и R_0', не зависящих от β, x_0 и R. Теорема 7.1 доказана.

Замечание 7.1. В частном случае $\Omega = \mathbb{R}^n$, $R = C\ln\frac{1}{\varepsilon}$ оценка (7.2) была получена в работе [9], а в частном случае уравнения Гинзбурга-Ландау в $\Omega = \mathbb{R}^2$ и $R \gg \frac{1}{\varepsilon}$ – в работе [50]. В общем случае оценка (7.2) была получена в [82] для случая параболического уравнения в регулярной области Ω и в [79] для случая диссипативного волнового уравнения.

Рассмотрим теперь ряд элементарных следствий доказанной оценки.

Следствие 7.1. Так как $W^{2,q}_b \subset C$, то

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}\left(\mathcal{A}, C(\Omega \cap B^R_{x_0})\right) \le C \operatorname{vol}_{\Omega,x_0}(R + K\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon})\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}. \tag{7.20}$$

Следствие 7.2. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^n,x_0}(r) = cr^n$, и, следовательно,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, W_b^{2,q}(B_{x_0}^R)\right) \le C\left(R + K\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}\right)^n \ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}. \tag{7.21}$$

В частном случае $R = \mathrm{C}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ оценка (7.21) принимает вид

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, W_b^{2,q}(B_{x_0}^{\ln 1/\varepsilon})\right) \le C_1\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1} \tag{7.22}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Следствие 7.3. Пусть Ω – регулярная ограниченная область. Тогда из оценки (7.3) следует, что

$$\dim_F\left(\mathcal{A}, W_b^{2,q}(\Omega)\right) \le C\,\mathrm{vol}(\Omega), \tag{7.23}$$

которая отражает хорошо известный факт, что уравнения вида (3.1) в ограниченных областях имеют конечную фрактальную размерность. Более того, формула (7.23) дает правильный вид зависимости этой размерности от вида области Ω (см., например, [3]).

Следствие 7.4. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^k \times \omega^{n-k}$ – цилиндрическая область (ω регулярная ограниченная область). Тогда

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, W_b^{2,q}(\Omega \cap B_{x_0}^R)\right) \le C\left(R + K\ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}\right)^k \ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}. \tag{7.24}$$

Напомним теперь понятие средней ε-энтропии на единицу объема (или плотности ε-энтропии, см., например, [14]).

Определение 7.1. Средней ε-энтропией на единицу объема аттрактора $\mathcal{A}$ называется следующее число:

$$\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \limsup_{R\to\infty}\frac{\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, W_b^{2,q}(\Omega \cap B_0^R)\right)}{\mathrm{vol}_{\Omega,0}(R)}. \tag{7.25}$$

Следствие 7.5. В условиях теоремы 7.1

$$\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le C \ln_+ \frac{R_0}{\varepsilon} \tag{7.26}$$

Действительно, оценка (7.26) немедленно следует из (7.25), (7.2) и очевидного утверждения

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{vol}_{\Omega,x_0}(R+C_1)}{\mathrm{vol}_{\Omega,x_0}(R)} = 1. \tag{7.27}$$

Замечание 7.2. Для случая комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау в $\Omega = \mathbb{R}^2$ оценка (7.26) была получена в работе [50].

Замечание 7.3. Взаимосвязь между средней ε-энтропией аттрактора $\mathcal{A}$ и пространственным хаосом в уравнениях вида (3.1) будет исследована в параграфе 10.

Сформулируем в заключение этого параграфа еще несколько следствий теоремы 7.1, необходимых нам для исследования количественных характеристик пространственно-временной динамики на аттракторе $\mathcal{A}$.

Следствие 7.6 [9]**.** Пусть выполнены условия теоремы 7.1, и пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$, а $M > 0$ – некоторое положительное число. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{e^{-M|x|}}(\mathbb{R}^n)\right) \le C(M)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}. \tag{7.28}$$

Доказательство. Действительно, так как аттрактор $\mathcal{A}$ ограничен в $W^{2,q}_b(\mathbb{R}^n)$, то существует число $R = R(M)$, такое что

$$\|\mathcal{A}, \{|x| > R\ln 1/\varepsilon\}\|_{e^{-M|x|},2,q} \le \varepsilon/2 \tag{7.29}$$

и, следовательно,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{e^{-M|x|}}(\mathbb{R}^n)\right) \le \mathbb{H}_{\varepsilon/2}\left(\mathcal{A}\big|_{B_0^{R\ln 1/\varepsilon}}, W^{2,q}(B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right). \tag{7.30}$$

Таким образом, достаточно оценить ε-энтропию в правой части (7.30). Для этого мы заметим, что

$$\|v, B_0^{R\ln 1/\varepsilon}\|_{2,q} \le (CR\ln 1/\varepsilon)^{n/q}\,\|v, B_0^{R\ln 1/\varepsilon}\|_{b,2,q}. \tag{7.31}$$

Поэтому из оценки (7.21) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{B_0^{R\ln 1/\varepsilon}}, W^{2,q}(B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right) \le$$
$$\le \mathbb{H}_{\varepsilon/(CR\ln 1/\varepsilon)^n}\left(\mathcal{A}, W_b^{2,q}(B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right) \le C(R)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}, \qquad (7.32)$$

где мы оценили сверху $\ln\ln 1/\varepsilon$ через $C\ln 1/\varepsilon$. Следствие 7.6 доказано.

Следствие 7.7. В условиях следствия 7.6 для любого $R > 0$ справедлива оценка

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0, R\ln 1/\varepsilon], W_b^{2,q}(B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right) \le C(R)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}, \qquad (7.33)$$

где $\mathcal{K}$ – множество решений уравнения (3.1), определенных и ограниченных при $t \in \mathbb{R}$ (см. теорему 5.1).

Доказательство. Действительно, из оценки (4.2) следует, что для любого $T \ge 0$

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0,T], W^{2,q}_{e^{-|x|}})\right) \le \mathbb{H}_{\varepsilon/(Ce^{KT})}\left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{e^{-|x|}}\right). \qquad (7.34)$$

Оценивая правую часть (7.34) при помощи (7.28) и учитывая очевидное вложение $W^{2,q}_{e^{-|x|}} \subset W^{2,q}_{b,e^{-2|x|}}$, получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0, R\ln 1/\varepsilon], W^{2,q}_{b,e^{-2|x|}}(B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right) \le C_R\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}. \qquad (7.35)$$

Заметим, что

$$\|v, B_0^{R\ln 1/\varepsilon}\|_{b,2,q} \le e^{2R/q\ln 1/\varepsilon}\|v, B_0^{R\ln 1/\varepsilon}\|_{b,e^{-2|x|},2,q} =$$
$$= \varepsilon^{-2R/q}\|v, B_0^{R\ln 1/\varepsilon}\|_{b,e^{-2|x|},2,q}$$

и, следовательно,

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0, R\ln 1/\varepsilon], W_b^{2,q}(B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right) \le$$
$$\le \mathbb{H}_{\varepsilon^{2R/q+1}}\left(\mathcal{K}, L^\infty([0, R\ln 1/\varepsilon], W^{2,q}_{b,e^{-2|x|}}(B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right) \le C_R\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}.$$

Следствие 7.7 доказано.

Замечание 7.3. Так как $W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то из оценки (7.33) следует, в частности, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0, R\ln 1/\varepsilon] \times B_0^{R\ln 1/\varepsilon})\right) \le C_R \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}. \tag{7.36}$$

Более того, рассуждая так же, как и доказательстве следствия 7.6, можно показать, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-M|t|-M|x|}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)\right) \le C_M \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}. \tag{7.37}$$

§8 *Бесконечномерные неустойчивые многообразия и оценка снизу ε-энтропии аттрактора.*

В этом параграфе мы опишем конструкцию бесконечномерного неустойчивого многообразия, соответствующего экспоненциально неустойчивому положению равновесия u_0 уравнения (3.1) (см., также [55-56]) и, используя эту конструкцию, получим оценки снизу ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$. Для простоты мы ограничимся рассмотрением лишь пространственно-однородного случая:

$$\Omega = \mathbb{R}^n,\ \ g(x) \equiv g \in \mathbb{R}^k, \quad L(x) \equiv L \in \mathbb{R}^n, \tag{8.1}$$

хотя излагаемый ниже метод может быть применен и к более широкому классу неограниченных областей (например, цилиндрических).

Предположим, что выполнены условия (8.1). Тогда из условий (3.5) следует, что существует хотя бы одно пространственно-однородное положение равновесия $u = z_0 \in \mathbb{R}^k$ системы (3.1), которое удовлетворяет уравнению

$$f(z_0) + \lambda_0 z_0 = g, \quad z_0 \in \mathbb{R}^k. \tag{8.2}$$

Основное предположение этого параграфа заключается в том, что это положение равновесия экспоненциально неустойчиво, то есть

$$\sigma(\mathcal{L}_{z_0}) \cap \{\operatorname{Re}\lambda > 0\} \ne \varnothing, \quad \mathcal{L}_{z_0} := a\Delta_x - (L, \nabla_x) - f'(z_0) - \lambda_0, \tag{8.3}$$

где L_{z_0} линеаризованный в точке z_0 оператор, соответствующий уравнению (3.1), а символ $\sigma(L)$ означает спектр оператора L в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$. Введем функцию $v(t) := u(t) - z_0$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\partial_t v = \mathcal{L}_{z_0} v - \widetilde{f}(v), \quad \widetilde{f}(v) := f(v + z_0) - f(z_0) - f'(z_0)v, \tag{8.4}$$

где $\widetilde{f} \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ удовлетворяет условию $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}'(0) = 0$.

Основная цель данного параграфа – показать, что естественного условия (8.3) достаточно для получения оценки снизу ε-энтропии аттрактора, аналогичной (7.21). Результаты этого параграфа будут существенно использованы в дальнейшем для изучения феномена пространственного хаоса в уравнениях вида (3.1).

Как обычно, мы начнем с изучения линейной неоднородной задачи, соответствующей (8.4),

$$\partial_t v - \mathcal{L}_{z_0} v = h(t). \tag{8.5}$$

Для этого нам понадобятся следующие функциональные пространства.

Определение 8.1. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Обозначим через $\mathbb{L}_\gamma(E)$, где E – некоторое банахово подпространство обобщенных функций $E \subset D'(\mathbb{R}^n)$, следующее пространство:

$$\mathbb{L}_\gamma(E) := \{u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_-, E) \ : \ \|u\|_{\mathbb{L}_\gamma(E)} := \sup_{t \le 0} e^{-\gamma t} \|u(t)\|_E < \infty\}. \tag{8.6}$$

Предложение 8.1. *Предположим, что $\gamma > \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{L}_{z_0})$. Тогда для любого $h \in \mathbb{L}_\gamma(L^q_b(\mathbb{R}^n))$ уравнение (8.5) имеет единственное решение $u(t)$, $t \le 0$ в классе $u \in \mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_b(\mathbb{R}^n))$, $0 < \mu < 1$. Таким образом, корректно определен линейный разрешающий оператор*

$$\mathbb{T}_\gamma : \mathbb{L}_\gamma(L^q_b) \to \mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_b), \quad u(t) := (\mathbb{T}_\gamma h)(t). \tag{8.7}$$

Более того, существует положительное число $\varepsilon > 0$, такое что

$$\|(\mathbb{T}_\gamma h)(t), B^1_{x_0}\|^q_{2-\mu,q} \le \\ \le C_\mu \sup_{s \in (-\infty, t]} e^{q(\gamma - \varepsilon)(t-s)} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|x - x_0|} \|h(s), B^1_x\|^q_{0,q} \right), \tag{8.8}$$

где константа C_μ не зависит от x_0 и $t \le 0$.

Доказательство. Заметим, что, благодаря наличию сглаживания в линейном уравнении (8.5) (см. теорему 4.2), достаточно доказать оценку (8.8) лишь для случая $W^{1,2}$-нормы в левой части (вместо $W^{2-\mu,q}$-нормы). Заметим, также, что без ограничения общности можно считать, что $\gamma = 0$.

Рассмотрим сначала случай $h \in \mathbb{L}_0(L^2(\mathbb{R}^n))$ (общий случай будет сведен ниже к этому частному случаю). Известно (см., например, [30]), что оператор $\mathcal{L}_{z_0}$ порождает аналитическую полугруппу в $L^2(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, по теореме об отображении спектров $\sigma(e^{\mathcal{L}_{z_0}})\backslash\{0\} = e^{\sigma(\mathcal{L}_{z_0})}$ (см. [30]). Более того, из наших предположений следует, что $\operatorname{Re}\sigma(\mathcal{L}) < 0$ ($\gamma = 0$!). Поэтому, существует положительное $\nu > 0$, такое что $\operatorname{Re}\sigma(\mathcal{L}_{z_0}) < -2\nu$. Таким образом, спектральный радиус экспоненты $e^{\mathcal{L}}$ удовлетворяет оценке

$$r(e^{\mathcal{L}_{z_0}}) \le e^{-2\nu} < 1 \tag{8.9}$$

и, следовательно, формула вариации постоянных

$$v(t) := \int_{-\infty}^{t} e^{\mathcal{L}_{z_0}(t-s)} h(s)\, ds \tag{8.10}$$

определяет решение $v \in \mathbb{L}_0(L^2(\mathbb{R}^n))$, которое удовлетворяет оценке

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad t \le 0. \tag{8.11}$$

Более того, это решение единственно в классе $\mathbb{L}_0(L^2)$.

Из оценки (8.11) и стандартной теоремы об $(L^2, W^{1,2})$-сглаживании следует, что

$$\|v(t)\|_{1,2} \le C_1 \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)} \|h(s)\|_{0,2}. \tag{8.12}$$

Для наших целей удобнее переписать оценку (8.12) в следующей эквивалентной форме:

$$\sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)} \|v(s)\|_{1,2} \le C_2 \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)} \|h(s)\|_{0,2}. \tag{8.13}$$

Для того, чтобы свести общий случай $h \in \mathbb{L}_0(L^2_b)$ к рассмотренному выше, фиксируем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и введем новую неизвестную функцию $w_{x_0}(t) := v(t)\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}$, где $\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}(x) := e^{-\varepsilon(1+|x-x_0|^2)^{1/2}}$ – такое же, как и в доказательстве теоремы 4.3, а $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число. Заметим, что функции $\widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0}$ гладкие, эквивалентны ϕ_{ε,x_0} и удовлетворяют условиям (4.38). Поэтому, как нетрудно проверить (см. доказательство теоремы 4.3), функция w_{x_0} удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w_{x_0} - \mathcal{L}_{z_0} w_{x_0} = \widetilde{\phi}_{\varepsilon,x_0} h + K_1(x) w_{x_0} + K_2(x)\nabla_x w_{x_0} := h_{x_0}(t). \tag{8.14}$$

Более того, из оценки (4.38) следует что $|K_i(x)| \le C_2\varepsilon$.

Очевидно, что $h_{x_0} \in \mathbb{L}_0(L^2)$, поэтому из оценки (8.13) вытекает

$$\sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)}\|w_{x_0}(s)\|_{1,2} \le \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)}\|h_{x_0}(s)\|_{0,2} \le$$
$$C_3 \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)}\|\phi_{\varepsilon,x_0} h(s)\|_{0,2} + C_3\varepsilon \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)}\|w_{x_0}(s)\|_{1,2}. \tag{8.15}$$

Зафиксировав в (8.15) $\varepsilon > 0$ достаточно малым, и, рассуждая аналогично (2.44)–(2.46), получим

$$\|v(t), B^1_{x_0}\|_{1,2} \le C \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)}\|\phi_{\varepsilon,x_0} v(s)\|_{1,2} \le$$
$$\le C_1 \sup_{s\in(-\infty,t]} e^{-\nu(t-s)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\phi_{\varepsilon/2,x_0}(x)\|h(s), B^1_x\|_{0,2}\right\}.$$

Оценка (8.8) доказана. Применив оператор $\sup_{t\in\mathbb{R}_-} e^{-\gamma t}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n}$ к обеим частям неравенства (8.8) и использовав (1.18), получим

$$\|v\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_b)} \le C_5\|h\|_{\mathbb{L}_\gamma(L^q_b)}. \tag{8.16}$$

Предложение 8.1 доказано.

Следствие 8.1. *Пусть выполнены условия предложения 6.1 и пусть ϕ – весовая функция достаточно малого экспоненциального роста. Тогда оператор $\mathbb{T}_\gamma$ построенный в предложении 8.1 ограничен как оператор из $\mathbb{L}_\gamma(L^q_{b,\phi})$ в $\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\phi})$.*

Действительно, последнее утверждение является немедленным следствием оценки (8.8) и неравенства (1.18).

Исследуем теперь однородное уравнение (8.5) (в случае, когда $h \equiv 0$ и $\gamma \in \sigma(\mathcal{L}_{z_0})$).

Предложение 8.2. *Пусть спектр оператора $\mathcal{L}_{z_0}$ удовлетворяет условию (8.3). Тогда, существуют $\gamma > 0$, $\sigma > 0$, $\xi_0 \in \mathbb{R}^k$, $e \in \mathbb{R}^k$ и оператор $\mathcal{P}_\gamma : \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0} \to \mathbb{L}_\gamma(W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k))$ (где пространство $\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0} := \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ определено в параграфе 6), такие что*

1. Для любого $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n)$ функция $v \in \mathbb{L}_\gamma(W_b^{2,q}(\mathbb{R}^n))$, определенная по формуле $v(t) := \mathcal{P}_\gamma(u_0)(t)$, $t \leq 0$, является решением уравнения (8.5) с $h \equiv 0$.

2. $2\gamma > \mathrm{Re}\,\sigma(\mathcal{L}_{z_0})$.

3. Пусть $S_\gamma(u_0) := \mathcal{P}_\gamma(u_0)(0)$ и пусть $\Pi_e z := \frac{z.e}{|e|^2}$ – ортопроектор на вектор e, тогда $\Pi_e S_\gamma(u_0) = u_0$ для любого $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$.

4. Для любого $N \in \mathbb{R}_+$ и любого $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{P}_\gamma(u_0)(t), B^1_{x_0}\|_{2,q} \leq$$
$$\leq C_N e^{\gamma t} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{(1 + |x - x_0|^{2N})^{1/2}} \|u_0, B^1_x\|_{0,\infty} \right\}. \quad (8.17)$$

Более того, константа C_N не зависит от $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Применив преобразование Фурье по $x \in \mathbb{R}^n$ к однородному уравнению (8.5), получим уравнение

$$\partial_t \widehat{v}(t) - \widehat{\mathcal{L}}_{z_0}(\xi)\widehat{v}(t) = 0, \quad (8.18)$$

где $\widehat{\mathcal{L}}_{z_0}(\xi) := -a|\xi|^2 - i(L, \xi) - f'(z_0)$.

Согласно условию (8.3), существует точка $\xi_0 \in \mathbb{R}^k$ и число $\widehat{\lambda}_0 \in \sigma(\widehat{\mathcal{L}}(\xi_0))$, такое что $\mathrm{Re}\,\widehat{\lambda}_0 > 0$. Более того, без ограничения общности мы можем предположить также, что $\mathrm{Re}\,\sigma(\widehat{\mathcal{L}}(\xi)) < \widehat{\lambda}_0 + \varepsilon$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^k$ и достаточно малого фиксированного $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего неравенству $\varepsilon < \mathrm{Re}\,\widehat{\lambda}_0/3$.

Обозначим через $\widehat{\lambda}(\xi)$ спектр $\sigma(\widehat{\mathcal{L}}_{z_0}(\xi))$. Тогда (так как функция $\widehat{\mathcal{L}}(\xi)$ является полиномом по ξ), $\widehat{\lambda}(\xi)$ является алгебраической аналитической функцией ξ (определенной на соответствующей римановой поверхности). Более того, без ограничения общности, мы можем предположить дополнительно, что $\xi_0 \neq 0$ и что точка $(\xi_0, \widehat{\lambda}_0)$ не является точкой ветвления этой функции. Обозначим через $\widehat{\lambda}_0(\xi)$ однозначную аналитическую ветвь функции $\widehat{\lambda}(\xi)$ в окрестности ξ_0, такую что $\widehat{\lambda}_0(\xi_0) = \widehat{\lambda}_0$.

Таким образом, существует окрестность $B^{r_0}_{\xi_0}$ точки ξ_0 и гладкие (вещественно аналитические) функции $\widehat{\lambda}_0 : B^{r_0}_{\xi_0} \to \mathbb{C}$ и $e_0 : B^{r_0}_{\xi_0} \to \mathbb{C}^k$, такие что

$$\widehat{\mathcal{L}}_{z_0}(\xi)e_0(\xi) = \widehat{\lambda}_0(\xi)e_0(\xi), \quad e_0(\xi) \neq 0. \tag{8.19}$$

Очевидно, что можно выбрать $r_0 > 0$ так чтобы $r_0 < |\xi_0|$ и было выполнено неравенство $\operatorname{Re}\widehat{\lambda}_0(\xi) > \operatorname{Re}\lambda_0 - \varepsilon$ для любого $\xi \in B^{r_0}_{\xi_0}$. Более того, так как $e_0(\xi_0) \neq 0$ то либо $\operatorname{Re} e_0(\xi_0) \neq 0$, либо $\operatorname{Im} e_0(\xi_0) \neq 0$. Определим $e := \operatorname{Re} e_0(\xi_0)$, если $\operatorname{Re} e_0(\xi_0) \neq 0$ и $e := \operatorname{Im} e_0(\xi_0)$ в противном случае. Тогда $\Pi_e e_0(\xi_0) \neq 0$ и, следовательно, перенормировав собственный вектор $e_0(\xi)$ подходящим образом и уменьшив r_0, если это необходимо, мы можем добиться выполнения условия

$$\Pi_e e_0(\xi) \equiv 1, \quad \text{для любого } \xi \in B^{r_0}_{\xi_0}. \tag{8.20}$$

Зафиксируем теперь показатель $\sigma > 0$ и соответствующее пространство $\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\operatorname{supp}\widehat{\phi} \subset B^{r_0/2}_{\xi_0}$ для любого $\phi \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$ и определим решение уравнения (8.18) по следующей формуле:

$$\widehat{v}(t,\xi) := e^{\widehat{\lambda}_0(\xi)t}\widehat{\phi}(\xi)e_0(\xi). \tag{8.21}$$

Мы утверждаем, что оператор $\mathcal{P}_\gamma : \phi \to v$, где $\gamma = \operatorname{Re}\widehat{\lambda}_0 - \varepsilon$, определенный формулой (8.21) удовлетворяет всем условиям доказываемого предложения.

Действительно, определим срезающую функцию $\psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, такую что $\psi(\xi) \equiv 1$ при $\xi \in B^{r_0/2}_{\xi_0}$ и $\psi(\xi) = 0$ при $\xi \notin B^{r_0}_{\xi_0}$. Тогда формула (8.21) может быть переписана в следующей эквивалентной форме:

$$\widehat{v}(t,\xi) = e^{\gamma t}\Psi(t,\xi)\widehat{\phi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^k, \tag{8.22}$$

где $\Psi(t,\xi) := e^{(\widehat{\lambda}_0(\xi) - \widehat{\lambda}_0 + \varepsilon)t}\psi(\xi)e_0(\xi)$. Более того, нетрудно проверить, что из нашего выбора $\psi, \widehat{\lambda}_0$ и e_0 следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^N_\xi \Psi(t,\xi)|^2\, d\xi \le C_N \tag{8.23}$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}_-$ (Здесь через D^N_ξ обозначена совокупность всех частных производных по ξ до порядка N включительно). Таким образом, $\mathcal{P}_\gamma$ может быть записан как оператор свертки

$$\mathcal{P}_\gamma(u_0)(t) = e^{\gamma t}\left(F^{-1}_\xi \Psi(t,\xi)\right) * u_0, \quad u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}. \tag{8.24}$$

Более того, из (8.23) следует, что ядро свертки (8.24) удовлетворяет оценке

$$|K(t,x)| := |(F_\xi^{-1}\Psi(t,\xi)(x)| \le C'_N \frac{1}{(1+|x|^{2N})^{1/2}} \tag{8.25}$$

для любого фиксированного $N \in \mathbb{R}_+$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_-$. Из оценки (8.25) и неравенства (1.8) для степенного веса $(1+|x-x_0|^2)^{-N}$ следует, что

$$|v(t,x_0)| \le \widetilde{C}''_N e^{\gamma t} \sup_{x\in\mathbb{R}^k} \frac{\|u_0, B^1_x\|_{0,\infty}}{(1+|x-x_0|^{2N})^{1/2}}. \tag{8.26}$$

Оценка (8.17) немедленно следует из (8.26) и сглаживающего свойства однородного уравнения (8.5) (см. теорему 4.2). Заметим также, что эта оценка показывает, в частности, что оператор $\mathcal{P}_\gamma$ действительно ограничен как оператор из B_{σ,ξ_0} в $\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2,q}))$.

Остальные свойства оператора $\mathcal{P}_\gamma$, описанные в условии предложения 8.2 являются очевидными. Действительно, то что функция $v := \mathcal{P}_\gamma u_0$ является решением уравнения (8.5) для любого $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$ немедленно следует из формулы (8.21). Второе утверждение предложения является следствием нашего выбора показателя ε ($2\gamma = 2(\widehat{\lambda}_0 - \varepsilon) > \widehat{\lambda}_0 + \varepsilon > \operatorname{Re}\sigma(\mathcal{L})$, так как $\varepsilon < \widehat{\lambda}_0/3$), а третье свойство немедленно следует из (8.20). Предложение 8.2 доказано.

Следствие 8.2. *Пусть выполнены условия предложения 8.2. Тогда для любой весовой функции ϕ полиномиального роста справедлива оценка*

$$\|\mathcal{P}_\gamma(u_0)(t)\|_{W^{2,q}_{b,\phi}(\mathbb{R}^n)} \le Ce^{\gamma t}\|u_0\|_{L^\infty_{b,\phi^{1/q}}(\mathbb{R}^n)}, \quad u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}, \tag{8.27}$$

где константа C не зависит от конкретного выбора весовой функции ϕ, удовлетворяющей (1.6).

Действительно, последнее утверждение немедленно следует из оценки (8.17) и неравенства (1.29).

Напомним, что в доказательстве предложения 8.2 мы построили *комплексное* решение $\mathcal{P}_\gamma(u_0)$ уравнения (8.5) для любого $u_0 \in B_{\sigma,\xi}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, тогда как в дальнейшем нам будут необходимы *вещественные* решения этого уравнения. Так как оператор $\mathcal{L}_{z_0}$ имеет вещественные коэффициенты, то $\operatorname{Re}\mathcal{P}_\gamma(u_0)$ является подходящим *вещественным* решением этого уравнения. Более того, все утверждения предложения 8.2, кроме третьего, остаются справедливыми и для оператора $\operatorname{Re}\mathcal{P}_\gamma$. Третье же условие должно быть модифицировано следующим образом:

$$\mathit{\Pi}_e \operatorname{Re} S_\gamma(u_0) = \operatorname{Re} u_0, \quad \text{для любого } u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}). \tag{8.28}$$

Заметим однако, что благодаря условию $\operatorname{supp}\widehat{u}_0 \subset B^{r_0}_{\xi_0}$ для некоторого $r_0 < |\xi_0|$, функция $u_0 \in B_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ однозначно восстанавливается по своей вещественной части. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 8.3. *Пусть $\sqrt{n}\sigma < |\xi_0|$. Тогда функция $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ однозначно определяется своей вещественной частью $\operatorname{Re} u_0$. Более того, для любого $N \in \mathbb{R}_+$ справедлива следующая оценка:*

$$|u_0(x_0)| \le C_N \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\operatorname{Re} u_0, B^1_x\|_{0,\infty}}{(1+|x-x_0|^{2N})^{1/2}}, \tag{8.29}$$

где константа C_N не зависит $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, пространства $\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ и $\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ являются изоморфными. Мы обозначим этот изоморфизм через $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}(\operatorname{Re} u_0) := u_0$).

Доказательство. Действительно, так как $\overline{u}_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,-\xi_0}$ и $\sqrt{n}\sigma < |\xi_0|$, то

$$\operatorname{supp}\widehat{u}_0 \cap \operatorname{supp}\widehat{\overline{u}_0} = \varnothing.$$

Пусть $\psi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – срезающая функция, такая что $\psi(\xi) \equiv 1$, если $\xi \in \xi_0 + [-\sigma,\sigma]^n$ и $\psi(\xi) \equiv 0$, если $\xi \in -\xi_0 + [-\sigma,\sigma]^n$, и пусть $K(x) := F^{-1}_{\xi\to x}\psi$. Тогда, очевидно,

$$u_0 = 2K * \operatorname{Re} u_0 \tag{8.30}$$

и $|K(x)| \le C_N(1+|x|^{2N})^{-1/2}$. Оценка (8.29) является немедленным следствием (8.30). Предложение 8.3 доказано.

Следствие 8.3. *Пусть ϕ – весовая функция полиномиального роста и пусть выполнены условия предложения 8.2. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\|u_0\|_{L^\infty_{b,\phi}} \le C\|\operatorname{Re} S_\gamma u_0\|_{L^\infty_{b,\phi}}, \quad u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}, \tag{8.31}$$

где C зависит только от показателя роста ν весовой функции ϕ и константы C_ϕ из неравенства (1.6) и не зависит от конкретного вида ϕ.

Действительно, последнее утверждение немедленно следует из (8.28) (8.29) и (1.21).

В дальнейшем мы будем использовать только вещественные решения уравнения (8.5), поэтому для упрощения обозначений мы будем писать $\mathcal{P}_\gamma$ вместо $\operatorname{Re}\mathcal{P}_\gamma$ и S_γ вместо $\operatorname{Re} S_\gamma$.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной технический результат этого параграфа. Для простоты мы будем считать в дальнейшем, что $z_0 = 0$.

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и пусть дополнительно выполнены условия (8.1) и (8.3). Тогда существуют $r > 0$ и C^1-отображение*

$$\mathcal{U}_0 : B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})) \to \mathcal{A}, \tag{8.32}$$

где $B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ – шар радиуса r в пространстве $\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$ с центром в нуле, а константы γ, σ, ξ_0 – такие же, как и в предложении 8.2, такие что для любого $u_0 \in B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{U}_0(u_0) - S_\gamma(u_0)\|_{\Phi_b(\mathbb{R}^n)} \le C\|u_0\|^2_{L^\infty_b(\mathbb{R}^n)} \tag{8.33}$$

(где $\mathcal{S}_\gamma$ определено в предложении 8.2).

Более того, это отображение липшицево и в локальной топологии в следующем смысле: для любого $N \in \mathbb{R}_+$ существует положительное число $r' = r'(N) \le r$, такое что, для любых $u_1, u_2 \in B(r', 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ и любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$\begin{cases} \|\mathcal{U}_0(u_1) - \mathcal{U}_0(u_2), B^1_{x_0}\|_{2,q} \le C_N \sup_{x\in\Omega} \frac{\|u_1-u_2, B^1_x\|_{0,\infty}}{(1+|x-x_0|^{2N})^{1/2}}, \\ \|u_1 - u_2, B^1_{x_0}\|_{0,\infty} \le C_N \sup_{x\in\Omega} \frac{\|\mathcal{U}_0(u_1)-\mathcal{U}_0(u_2), B^1_x\|_{2,q}}{(1+|x-x_0|^{2N})^{1/2}}, \end{cases} \tag{8.34}$$

в которой константа C_N не зависит от $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы основывается на теореме о неявной функции и на следующей простой лемме.

Лемма 8.1. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$, и пусть показатель $\mu > 0$ такой, что справедливо вложение $W^{2-\mu,q} \subset C$. Тогда оператор Немыцкого $Fv = f(v)$ принадлежит пространству $C^1(\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}), \mathbb{L}_{2\gamma}(L_b^q))$ для любого $\gamma > 0$.*

Доказательство. Действительно, так как $f(0) = f'(0) = 0$, то

$$f(v) = \int_0^1 f'(s_1 v)v\, ds_1 = \left(\int_0^1 \int_0^1 f''(s_1 s_2 v)\, ds_1\, ds_2\right) v.v.$$

Поэтому оператор F отображает $\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}(\mathbb{R}^n))$ в $\mathbb{L}_{2\gamma}(L_b^q(\mathbb{R}^n))$ (здесь мы воспользовались также вложением $W_b^{2-\mu,q} \subset L^\infty$. Аналогично, его производная Фреше вычисляется по формуле

$$D_v F(v)\theta := f'(v)\theta = \left(\int_0^1 f''(sv)\, ds\right) v.\theta.$$

Поэтому $D_v F(v)$ – ограниченный линейный оператор, принадлежащий пространству $\mathcal{L}(\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}), \mathbb{L}_{2\gamma}(L_b^q))$. Непрерывность этого оператора по v проверяется стандартным образом. Лемма 8.1 доказана

Мы собираемся построить решение уравнения (8.4), определенное при $t \le 0$, и лежащее в окрестности положения равновесия $v = 0$, используя теорему о неявной функции. Для этого рассмотрим нелинейность $\widetilde{f}(v)$ как возмущение и перепишем уравнение (8.4) в виде

$$\partial_t v - \mathcal{L}_{z_0} v = -\widetilde{f}(v), \quad t \le 0.$$

Фиксируем теперь γ такое же, как и в предложении 8.2, μ – такое же, как и в лемме 8.1, и рассмотрим уравнение

$$u + \mathbb{T}_{2\gamma}\widetilde{f}(u) = \mathcal{P}_\gamma u_0, \quad u \in \mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}), \tag{8.35}$$

где $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$, а σ и ξ_0 – такие же, как и в предложении 8.2. Заметим, что $2\gamma > \sigma(\mathcal{L}_{z_0})$, поэтому оператор $\mathbb{T}_{2\gamma}$ корректно определен. Более того, каждое решение $v \in L_\gamma(W_b^{2-\mu,q})$ уравнения (8.35) автоматически является решением уравнения (8.4), поэтому достаточно решить уравнение (8.35) в пространстве $\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q})$.

Определим функцию $\mathcal{F} : \mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}) \times \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0} \to \mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q})$ по формуле

$$\mathcal{F}(v, u_0) = v + \mathbb{T}_{2\gamma}\widetilde{f}(v) - \mathcal{P}_\gamma u_0.$$

Тогда из предложений 8.1, 8.2 и леммы 8.1 следует, что функция $\mathcal{F}$ принадлежит пространству $C^1(\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}) \times \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}, \mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}))$ и справедливо равенство $D_v\mathcal{F}(0,0) = Id$. Поэтому, по теореме о неявной функции, (см., например, [15]) существует окрестность $B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ и C^1-функция

$$\mathcal{U} \,:\, B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}) \to \mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q}),$$

такая что $\mathcal{F}(\mathcal{U}(u_0), u_0) \equiv 0$ и следовательно, $\mathcal{U}(u_0)(t)$ решение задачи (8.4), определенное при $t \le 0$. Из уравнения (8.35), предложений 8.1 и 8.2 и леммы 8.1 следует теперь, что

$$\|\mathcal{U}(u_0) - \mathcal{P}_\gamma u_0\|_{\mathbb{L}_{2\gamma}(W_b^{2-\mu,q})} \le C\|\widetilde{f}(\mathcal{U}(u_0))\|_{\mathbb{L}_{2\gamma}(L_b^q)} \le \\ \le C_1\|\mathcal{U}(u_0)\|^2_{\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q})} \le C_2\|u_0\|^2_{\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}}. \quad (8.36)$$

Заметим теперь, что функция $v(t) := \mathcal{U}(u_0)(t)$ удовлетворяет уравнению (8.4). Следовательно, благодаря свойству сглаживания и условию $\widetilde{f}(0) = 0$,

$$\|u(t+1)\|_{W_b^{2,q}} \le Q(\|u(t)\|_{W_b^{2-\mu,q}})\|u(t)\|_{W_b^{2-\mu,q}}$$

и, таким образом,

$$\|\mathcal{U}(u_0)\|_{\mathbb{L}_\gamma(\Phi_b)} \le \\ \le Q(\|\mathcal{U}(u_0)\|_{\mathbb{L}_0(W_b^{2-\mu,q}(\Omega))})\|\mathcal{U}(u_0)\|_{\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q})} \le C\|u_0\|_{\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}} \quad (8.37)$$

для любого $u_0 \in B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$. Аналогично, функция $w(t) := \mathcal{U}(u_0)(t) - \mathcal{P}_\gamma u_0$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w(t) - L_{z_0} w = -\widetilde{f}(u(t)).$$

Используя свойство сглаживания для этого уравнения, оценку (8.37), тот факт, что $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}'(0) = 0$, и оценку (8.36), получим

$$\|\mathcal{U}(u_0) - \mathcal{P}_\gamma u_0\|_{\mathbb{L}_{2\gamma}(\Phi_b)} \le C\|\mathcal{U}(u_0) - \mathcal{P}_\gamma u_0\|_{\mathbb{L}_{2\gamma}(W_b^{2-\mu,q})} + \\ + C\|\mathcal{U}(u_0)\|^2_{\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q})} \le C_1\|u_0\|^2_{\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}}. \quad (8.38)$$

Определим теперь $\mathcal{U}_0(u_0) := \mathcal{U}(u_0)\big|_{t=0}$. Тогда из (8.38) и определения S_γ следует оценка (8.33). Вложение $\mathcal{U}_0(B(0,\mu_0,\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})) \subset \mathcal{A}$ следует теперь из описания аттрактора в виде (5.7) и того факта, что решение $u(t) = \mathcal{U}(u_0)(t)$ уравнения (3.1), определенное изначально только при $t \le 0$, может быть продолжено, согласно теореме 3.1 до решения $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежащего аттрактору.

Таким образом, остается проверить оценку (8.34). Действительно, пусть $u_0^1, u_0^2 \in B(r,0,\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$, и пусть $v^i(t) := \mathcal{U}(u_0^i)(t)$ – соответствующие решения уравнения (8.4). Обозначим: $w_0 := u_0^1 - u_0^2$ и $w(t) := w^1(t) - w^2(t)$. Заметим, что последняя функция удовлетворяет уравнению

$$w + \mathbb{T}_{2\gamma}(\tilde{f}(v^1) - \tilde{f}(v^2)) - \mathcal{P}_\gamma w_0 = 0. \tag{8.39}$$

Зафиксируем теперь $N \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и соответствующую весовую функцию $\theta_{N,x_0}(x) = \big(1 + |x - x_0|^2\big)^{-N/2}$. Тогда из (8.39), предложения 8.1 и предложения 1.4 следует

$$\|w - \mathcal{P}_\gamma w_0\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})} \le C_N \|\tilde{f}(v^1) - \tilde{f}(v^2)\|_{\mathbb{L}_{2\gamma}(L^q_{b,\theta_{N,x_0}})}, \tag{8.40}$$

где C_N не зависит от x_0.

Напомним, что $\tilde{f} \in C^2$ и $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0$, следовательно

$$|\tilde{f}(v^1) - \tilde{f}(v^2)| \le Q(|v^1| + |v^2|)(|v^1| + |v^2|)|v^1 - v^2| \tag{8.41}$$

для некоторой монотонной функции Q. Из оценок (8.41) и (8.37) следует, что

$$\begin{gathered}
\|\tilde{f}(v^1) - \tilde{f}(v^2)\|_{\mathbb{L}_{2\gamma}(L^q_{b,\varphi_\varepsilon,x_0})} \le \\
\le \widehat{Q}\left(\|v^1\|_{\mathbb{L}_0(W_b^{2-\mu,q})} + \|v^2\|_{\mathbb{L}_0(W_b^{2-\mu,q})}\right) \times \\
\times \left(\|v^1\|_{\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q})} + \|v^2\|_{\mathbb{L}_\gamma(W_b^{2-\mu,q})}\right) \|w\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\varphi_\varepsilon,x_0})} \le \\
\le \widehat{Q}(2Cr)2Cr\|w\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\varphi_\varepsilon,x_0})}
\end{gathered} \tag{8.42}$$

для любых $v_0^1, v_0^2 \in B(r,0,\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$. Уменьшая r, если необходимо мы можем считать, что

$$\begin{gathered}
\|\tilde{f}(v^1) - \tilde{f}(v^2)\|_{\mathbb{L}_{2\gamma}(L^q_{b,\theta_{N,x_0}})} \le \\
\le \delta/C_N \left(\|w - \mathcal{P}_\gamma w_0\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})} + \|\mathcal{P}_\gamma w_0\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})}\right),
\end{gathered} \tag{8.43}$$

где $\delta = \delta(r)$ может быть выбрано сколь угодно малым, если радиус $r = r(N) > 0$ достаточно мал. Из оценок (8.40) и (8.41) следует, что

$$\|w - \mathcal{P}_\gamma w_0\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})} \leq \delta \|\mathcal{P}_\gamma w_0\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})}. \tag{8.44}$$

Применив оценку (8.27) к неравенству (8.44), получим

$$\|w\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})} \leq C_2 \|w_0\|_{\mathbb{L}^\infty_{b,\theta_{N/q,x_0}}}. \tag{8.45}$$

Заметим, что функция $w(t)$ является решением уравнения в вариациях (4.3), поэтому используя (8.45) и свойство сглаживания (см. теорему 4.2), получим

$$\|\mathcal{U}_0(v_0^1) - \mathcal{U}_0(v_0^2)\|_{\Phi_{b,\theta_{N,x_0}}} \leq \|\mathcal{U}(v_0^1) - \mathcal{U}(v_0^2)\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})} \leq$$
$$\leq C\|w\|_{\mathbb{L}_\gamma(W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}})} \leq C_1 \|w_0\|_{L^\infty_{b,\theta_{N/q,x_0}}}. \tag{8.46}$$

Так как константа C_1 в (8.46) не зависит от x_0, то первая оценка (8.34) немедленно следует из (8.46). Таким образом, остается доказать вторую оценку. Для этого мы напомним, что $\Pi_e S_\gamma u_0 \equiv \operatorname{Re} u_0$ (см. предложение 8.2) и следовательно (благодаря (8.31))

$$\|S_\gamma w_0\|_{W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}}} \geq C\|S_\gamma w_0\|_{L^\infty_{b,\theta_{N/q,x_0}}} \geq$$
$$\geq C_1 \|\operatorname{Re} w_0\|_{L^\infty_{b,\theta_{N/q,x_0}}} \geq C_2 \|w_0\|_{L^\infty_{b,\theta_{N/q,x_0}}}. \tag{8.47}$$

Из оценок (8.44) и (8.27) следует

$$\|S_\gamma w_0\|_{W^{2-\mu,q}_{b,\theta_{N,x_0}}} \leq \|w(0)\|_{\Phi_{b,\theta_{N,x_0}}} + C\delta \|w_0\|_{L^\infty_{b,\theta_{N/q,x_0}}}. \tag{8.48}$$

Объединив (8.47) и (8.48) и выбрав $\delta > 0$ таким образом, чтобы $C\delta < C_2/2$, окончательно получим

$$\|w_0\|_{L^\infty_{b,\theta_{N/q,x_0}}} \leq C_3 \|w(0)\|_{\Phi_{b,\theta_{N,x_0}}}. \tag{8.49}$$

Теорема 8.1 доказана.

Сформулируем теперь ряд элементарных, но весьма полезных следствий доказанной теоремы.

Следствие 8.4. *Пусть выполнены условия теоремы 8.1, и пусть ϕ – весовая функция полиномиального роста μ. Тогда отображение $\mathcal{U}_0$ осуществляет липшицев гомеоморфизм между шаром $B(r', 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$, где $r' = r'(\mu) > 0$, и его образом $\mathcal{U}_0(B(r', 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}))$ в следующем смысле:*

$$C_1\|u_0^1 - u_0^2\|_{L^\infty_{b,\phi}} \le \|\mathcal{U}_0(u_0^1) - \mathcal{U}_0(u_0^2)\|_{\Phi_{b,\phi^q}} \le C_2\|u_0^1 - u_0^2\|_{L^\infty_{b,\phi}}, \qquad (8.50)$$

для любых $u_0^1, u_0^2 \in B(r', 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ и констант C_i, зависящих только от μ и константы C_ϕ из неравенства (1.6).

Действительно, оценка (8.51) немедленно следует из (8.34) и (1.21).

Замечание 8.1. Нам неизвестно, справедлива ли оценка (8.50) для весовых функций ϕ экспоненциального роста.

Следствие 8.5. *Пусть $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ – группа пространственных сдвигов: $(T_h u)(x) := u(x + h)$ и пусть $\mathbb{K} := B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}))$, где r, ξ_0 и σ такие же, как и в теореме 8.1. Тогда, очевидно, $T_h\mathcal{A} = \mathcal{A}$ и $T_h\mathbb{K} = \mathbb{K}$. Более того отображение $\mathcal{U}_0 : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ перестановочно с действием этой группы:*

$$T_h\mathcal{U}_0(u_0) = \mathcal{U}_0(T_h u_0), \quad \text{для любого } h \in \mathbb{R}^n, \quad u_0 \in \mathbb{K}. \qquad (8.51)$$

Действительно, равенство (8.51) следует из того, что операторы $\mathbb{T}_\gamma$ и $\mathcal{P}_\gamma$, входящие в уравнение (8.35), определяющее решение $\mathcal{U}(u_0)$, перестановочны с группой пространственных сдвигов, и того факта, что решение $\mathcal{U}(u_0)$, построенное по теореме о неявной функции, единственно в соответствующем классе.

Следствие 8.6. *Пусть $u_0^1, u_0^2 \in B(\mu, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$, где $\mu \le r$ (а константы r, σ, ξ_0 такие же, как и в теореме 8.1). Тогда, для любого $R \ge 0$*

$$\|\mathcal{U}_0(u_0^1) - \mathcal{U}_0(u_0^2)\|_{L^\infty(B_0^R)} \ge \|\operatorname{Re}(u_0^1 - u_0^2)\|_{L^\infty(B_0^R)} - C\mu^2, \qquad (8.52)$$

где C не зависит от R.

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{U}_0(u_0^1) - \mathcal{U}_0(u_0^2)\|_{L^\infty(B_0^R)} \ge \\
&\ge \|S_\gamma u_0^1 - S_\gamma u_0^2\|_{L^\infty(B_0^R)} - \|\mathcal{U}_0(u_0^1) - S_\gamma u_0^1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{U}_0(u_0^2) - S_\gamma u_0^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad \ge \|S_\gamma u_0^1 - S_\gamma u_0^2\|_{L^\infty(B_0^R)} - C_1(\|u_0^1\|^2_{\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}} + \|u_0^2\|^2_{\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}}) \ge \\
&\qquad\qquad \ge \|\operatorname{Re}(u_0^1 - u_0^2)\|_{L^\infty(B_0^R)} - 2C_1\mu^2.
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\Pi_e S_\gamma u_0 = \operatorname{Re} u_0$.

Теперь мы готовы получить оценки снизу для колмогоровской ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (8.4).

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы 8.1. Тогда существуют константы $C_i > 0$, $i = 1, 2$ и $\varepsilon_0 > 0$, зависящие только от уравнения (3.1), такие что для любого $R \geq 1$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ справедливы оценки*

$$C_2 R^n \ln \frac{1}{\varepsilon} \leq \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, L^\infty(B_0^R)\right) \leq C_1 (R + K \ln \frac{1}{\varepsilon})^n \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{8.53}$$

Более того, в случае $R = 1$ справедлива более точная оценка снизу

$$C_2 \left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{(\ln \ln \frac{1}{\varepsilon})^n}\right)^{n+1} \leq \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, L^\infty(B_0^1)\right) \leq C_1 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}. \tag{8.54}$$

Доказательство. Напомним, что правые части оценок (8.53) и (8.54) получены в теореме 7.1. Поэтому, достаточно доказать только их левые части. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало, $\mu = \left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)^{1/2} \leq r$ и пусть функции $v_0^1, v_2^0 \in B(\mu, 0, \mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi_0})$, такие что

$$\|v_0^1 - v_0^2\|_{L^\infty(B_0^R)} \geq \varepsilon. \tag{8.55}$$

Тогда из (8.52) следует

$$\|\mathcal{U}_0(\mathcal{R} v_0^1) - \mathcal{U}_0(\mathcal{R} v_0^2)\|_{L^\infty(B_0^R)} \geq \varepsilon/2, \tag{8.56}$$

где оператор $\mathcal{R}$ определен в предложении 6.3.

Оценки (8.55) и (8.56) вместе с вложением $\mathcal{U}_0(\mathcal{R} v_0^i) \in \mathcal{A}$ позволяют заключить, что

$$\mathbb{H}_{\varepsilon/4} \left(\mathcal{A}, L^\infty(B_0^R)\right) \geq \mathbb{H}_\varepsilon \left(B(\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)^{1/2}, 0, \mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi_0}), C_b(B_0^R)\right) =$$
$$= \mathbb{H}_{(2C\varepsilon)^{1/2}} \left(B(1, 0, \mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi_0}), C_b(B_0^R)\right). \tag{8.57}$$

Левые части оценок (8.53) и (8.54) следуют теперь из оценок снизу (6.24) и (6.31) для ε-энтропии единичного шара в пространстве $\mathbb{B}^{Re}_{\sigma,\xi_0}$. Теорема 8.2 доказана.

Замечание 8.2. Так как $W_b^{2,q}(B_0^R) \subset L^\infty(B_0^R)$, то из оценок (8.53) и (8.54), и теоремы 7.1 следует, что аналогичные оценки имеют место и в случае метрики $W_b^{2,q}(B_0^R)$ (вместо метрики $L^\infty(B_0^R)$).

Замечание 8.3. Из оценки (8.53) видно, что оценка сверху для ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$, полученная в предыдущем параграфе является точной при $R \sim \ln\frac{1}{\varepsilon}$ или при $R \gg \ln\frac{1}{\varepsilon}$. Вторая оценка (8.54) показывает, что и в случае $R \ll \ln\frac{1}{\varepsilon}$ оценка сверху является в некотором смысле точной (по модулю двойного логарифма в степени $n(n+1)$).

Следствие 8.7. *Пусть выполнены предположения теоремы 8.2. Тогда*

$$0 < C_1 \ln\frac{1}{\varepsilon} \le \overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{A}) \le C_2 \ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{8.58}$$

Действительно, оценка (8.58) немедленно следует из (8.53) (и замечания 8.2).

Глава 3. Пространственный и динамический хаос, порождаемый уравнением реакции-диффузии в неограниченной области.

Эта глава посвящена исследованию пространственно-временной динамики, порождаемой пространственно-однородной системой уравнений (0.1) в $\mathbb{R}^n$.

В параграфе 9 введен ряд новых количественных характеристик этой динамики, обобщающих фрактальную размерность и топологическую энтропию и исследованы их простейшие свойства и соотношения между ними.

В параграфе 10, основываясь на явной конструкции бесконечномерных неустойчивых многообразий для уравнения (0.1), приведенной в параграфе 8, и интерполяционной формуле Котельникова-Картрайт, мы построим гомеоморфное вложение схемы Бернулли $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_l)$, введенной в определении 0.1, в группу T_h пространственных сдвигов, действующую на аттракторе. Кроме того, в этом параграфе показано, что полученная таким образом пространственно-хаотическая структура на аттракторе сохраняется при эволюции во времени.

Параграф 11 посвящен построению и исследованию вспомогательной пространственной динамической системы, которая необходима для обобщения результатов параграфа 10 на случай временной динамики.

В параграфе 12 мы построим, аналогично параграфу 8, бесконечномерные неустойчивые многообразия для вспомогательной пространственной динамической системы, введенной в предыдущем параграфе.

При помощи этих многообразий мы построим в параграфе 13 описание пространственно-временной динамики на аттракторе в терминах схем Бернулли $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_l)$, аналогичное описанию чисто пространственной динамики, полученному в параграфе 10.

В заключительном параграфе 14 рассмотрен ряд примеров и частных случаев общих результатов, доказанных в предыдущих параграфах. В частности, в этом параграфе показано, что пространственно-временная топологическая энтропия аттрактора $\mathcal{A}$ тождественно равна нулю, если уравнение (0.1) имеет градиентную структуру. Кроме того, рассмотрен случай уравнения вида (0.1) с малой матрицей диффузии ($a = \tilde{a}\nu$, $\nu \ll 1$) и исследована зависимость величин, введенных в параграфе 9, от малого параметра ν, а также, приведены естественные примеры, показывающие отсутствие непрерывной зависимости аттрактора $\mathcal{A}$ от области Ω.

§9 Количественные характеристики пространственно-временной динамики на аттракторе.

В этом параграфе мы введем и исследуем ряд метрических инвариантов пространственно-временной динамики, порождаемой уравнением (3.1) на аттракторе $\mathcal{A}$, обобщающих понятие фрактальной размерности и топологической энтропии. Как и в предыдущем параграфе, мы ограничимся рассмотрением лишь пространственно-однородного случая

$$\Omega = \mathbb{R}^n,\ L(x) \equiv L \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) \equiv g \in \mathbb{R}^k. \tag{9.1}$$

В этом случае аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения (3.1) обладает важной дополнительной структурой, а именно, он, очевидно, является инвариантным относительно группы сдвигов вдоль пространственных направлений:

$$T_h\mathcal{A} = \mathcal{A}, \ \ (T_h u_0)(x) := u_0(x+h), \ \ h \in \mathbb{R}^n. \tag{9.2}$$

Напомним, что аттрактор $\mathcal{A}$ инвариантен, также, относительно полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$, описывающей эволюцию во времени начальных данных задачи (3.1). Более того, эта полугруппа перестановочна с группой сдвигов вдоль пространственных направлений:

$$S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}, \ \ T_h S_t = S_t T_h, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ h \in \mathbb{R}^n. \tag{9.3}$$

Таким образом, $(n+1)$-параметрическая полугруппа $\{\mathbb{S}_{(t,h)}, t \in \mathbb{R}_+,\ h \in \mathbb{R}^n\}$ действует на аттракторе:

$$\mathbb{S}_{(t,h)}\mathcal{A} = \mathcal{A}, \ \ (\mathbb{S}_{(t,h)}u_0)(x) := (S_t u_0)(x+h), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \ \ h \in \mathbb{R}^n. \tag{9.4}$$

В дальнейшем мы будем интерпретировать эту расширенную $(n+1)$-параметрическую полугруппу как динамическую систему с многомерным временем, действующую на аттракторе $\mathcal{A}$, и будем пытаться описать феномен пространственно-временного хаоса, возникающего в системах уравнений вида (3.1) в неограниченной области, в терминах динамических характеристик этой полугруппы.

Прежде всего, мы напомним определение топологической энтропии динамической системы (см., например, [63], [71], [75]), адаптированное к случаю многомерного 'времени'. Для этого, согласно лемме 5.1, метризуем локальную топологию $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ на аттракторе $\mathcal{A}$ при помощи весового пространства $L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)$, где весовая функция экспоненциального роста ϕ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to\infty} \phi(x) = 0. \tag{9.5}$$

Определение 9.1. Для любого $R > 0$ введем новую эквивалентную метрику на $\mathcal{A}$ при помощи выражения

$$\mathrm{d}_{R,\phi}(u_0, v_0) := \sup_{(t,h)\in[0,R]^{n+1}} \|\mathbb{S}_{(t,h)}u_0 - \mathbb{S}_{(t,h)}v_0\|_{L^\infty_\phi}. \tag{9.6}$$

Тогда, топологическая энтропия динамической системы (9.4) определяется следующим образом (см. [63]):

$$\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, \mathrm{d}_{R,\phi}\right), \tag{9.7}$$

где через $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, \mathrm{d}_{R,\phi})$ обозначена колмогоровская ε-энтропия аттрактора $\mathcal{A}$ в метрике $\mathrm{d}_{R,\phi}$ (очевидно $\mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{A}, \mathrm{d}_{R,\phi})$ является неубывающей функцией ε, поэтому предел (9.7) существует).

Известно (см., например, [63]), что топологическая энтропия (9.7) зависит только от топологии множества $\mathcal{A}$ и не зависит от способа метризации этой топологи. В частности, величина (9.7) не зависит от ϕ. Более того, как нетрудно показать (см. [80] или предложение 9.3 ниже), выражение (9.7) может быть переписано в следующем виде:

$$\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0,R]^{n+1})\right), \tag{9.8}$$

где множество $\mathcal{K}$ ограниченных полных решений уравнения (3.1) определено в теореме 5.1. Заметим также, что, используя стандартные соображения, основанные на субаддитивности, можно показать существование предела по $R \to \infty$ в (9.8).

Предложение 9.1. *Следующий предел существует для любого $\varepsilon > 0$:*

$$\overline{\mathbb{H}}_\varepsilon(\mathcal{K}) :=$$
$$= \lim_{\substack{R_i \to +\infty \\ i=1,..,n+1}} \frac{1}{R_1 \cdots R_{n+1}} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty([0,R_1] \times \cdots \times [0,R_{n+1}])\right). \quad (9.9)$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\Phi(R_1, \cdots, R_{n+1}) := \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty([0,R_1] \times \cdots \times [0,R_{n+1}])\right). \quad (9.10)$$

Тогда из инвариантности множества $\mathcal{K}$ относительно пространственных и временных трансляций и субаддитивности (6.36) следует, что эта функция субаддитивна по каждому аргументу, то есть

$$\Phi(R_1, \cdots, R_i' + R_i'', \cdots, R_{n+1}) \le \Phi(R_1, \cdots, R_i', \cdots, R_{n+1}) +$$
$$+ \Phi(R_1, \cdots, R_i'', \cdots, R_{n+1}) \quad (9.11)$$

и следовательно,

$$\lim_{\substack{R_i \to +\infty \\ i=1,..,n+1}} \Phi(R_1, \cdots, R_{n+1}) = \inf_{\substack{R_i > 0 \\ i=1,..,n+1}} \Phi(R_1, \cdots, R_{n+1}).$$

Предложение 9.1 доказано.

Следствие 9.1. *Следующие выражения являются эквивалентными определениями для топологической энтропии $\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A})$:*

$$\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty([0,R]^{n+1})\right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{(2R)^n} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty([0,T], L^\infty([-R,R]^n))\right). \quad (9.12)$$

Замечание 9.1. Отметим, что последнее выражение в правой части (9.12) совпадает с определением средней топологической на единицу объема, введенной в работе [51] для исследования некоторых частных случаев уравнения (3.1). Таким образом, соотношение (9.12) дает естественную геометрическую интерпретацию понятию средней топологической энтропии на единицу объема.

Заметим, что, априори, величина (9.7) может быть бесконечной. Следующая теорема показывает, что это не так в нашем случае.

Теорема 9.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и условие* (9.1). *Тогда топологическая энтропия аттрактора $\mathcal{A}$ является конечной:*

$$\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A}) \le C < \infty. \tag{9.13}$$

Доказательство. Действительно, благодаря субаддитивности (9.11) и оценке (7.36), для любого $R > \ln 1/\varepsilon$ справедлива оценка

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0,R]^{n+1})\right) \le \left(\frac{R}{\ln 1/\varepsilon}+1\right)^{n+1} \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty([0,\ln 1/\varepsilon]^{n+1})\right) \le \\ \le C_1 R^{n+1} + C_2 R^n \left(\ln 1/\varepsilon\right)^{n+1}$$

и, следовательно,

$$\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A}) \le C_1.$$

Теорема 9.1 доказана.

Введем теперь ряд характеристик, аналогичных топологической энтропии $\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A})$, соответствующих k-параметрическим подполугруппам $k < n+1$, расширенной динамической системы $\{\mathbb{S}_{(t,h)},\ t \ge 0,\ h \in \mathbb{R}^n\}$, действующей на аттракторе.

Определение 9.2. Пусть $V_k \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ – произвольная k-мерная гиперплоскость, $0 \le k \le n+1$. Определим динамическую систему, ассоциированную с этой гиперплоскостью, по следующей формуле:

$$\mathbb{S}^{V_k}_{(t,h)} := \{\mathbb{S}_{(t,h)},\ (t,h) \in V_k \cap (R_+ \times \mathbb{R}^n)\}. \tag{9.12}$$

Тогда, очевидно,

$$\mathbb{S}^{\mathbb{R}_t}_{(t,h)} = S_t \quad \text{и} \quad \mathbb{S}^{\mathbb{R}^n_x}_{(t,h)} = T_h. \tag{9.13}$$

Зафиксируем ортонормированный базис $\{e_1, \cdots, e_k\}$ в V_k таким образом, чтобы $e_i \subset \mathbb{R}^n_x$ для $i = 2, \cdots, k$ и чтобы полупрямая $\{he_1, h \in \mathbb{R}_+\}$ лежала в полупространстве $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.

Аналогично (9.6), для каждого $R > 0$ определим метрику на аттракторе $\mathcal{A}$ при помощи следующего выражения:

$$\mathrm{d}_{R,V_k}(u_0, v_0) := \sup_{\substack{l_i \le R \\ i=1,\cdots,k}} \|\mathbb{S}_{\sum_i l_i e_i} u_0 - \mathbb{S}_{\sum_i l_i e_i} v_0\|_{L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{9.14}$$

Тогда, аналогично (9.7), топологическая энтропия этой полугруппы определяется выражением

$$h_k^{V_k}(\mathcal{A}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^k}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, \mathrm{d}_{R,V_k}\right). \tag{9.14$'$}$$

Заметим однако, что, в отличие от случая $k = n+1$, в случае $k < n+1$ топологическая энтропия (9.14′), как правило, оказывается бесконечной (см. параграфы 10 и 13). Поэтому мы введем понятие модифицированной топологической энтропии, учитывающее типичную скорость расходимости по $\varepsilon \to 0$ в выражении (9.14′), следующим образом:

$$\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) := \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-1}\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R^k}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, \mathrm{d}_{R,V_k}\right). \tag{9.15}$$

Замечание 9.2. Заметим, что в случае $k = n+1$ величина (9.15) совпадает с выражением (9.7), а в случае $k < n+1$ отличается от стандартного определения (9.14′) топологической энтропии наличием множителя $(\ln 1/\varepsilon)^{k-n-1}$, благодаря которому эта величина оказывается конечной (см. теорему 9.2 ниже).

Отметим также, что, хотя мы определили энтропию (9.15) используя специальный выбор ортонормированного базиса в подпространстве V_k, но, как нетрудно показать, эта величина не зависит от выбора базиса, а зависит только от подпространства V_k.

Замечание 9.3. Существенным отличием модифицированной топологической энтропии (9.15) является ее зависимость от выбора метрики на аттракторе. Таким образом, (9.15) является только метрическим, но не топологическим инвариантом. В определении 9.2 мы зафиксировали неявным образом наиболее естественный выбор метрики на аттракторе $\mathcal{A}$ при помощи весового пространства $L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)$ с экспоненциально убывающим весом $\phi(x) = e^{-|x|}$.

Следующее элементарное предложение описывает поведение величин (9.15) под действием непрерывных по Гельдеру преобразований.

Предложение 9.2. *Пусть $F : (\mathcal{A}, \phi_1) \to (\mathcal{A}, \phi_2)$ непрерывное по Гельдеру преобразование аттрактора с показателем Гельдера $0 < \alpha \le 1$, коммутирующее с динамической системой* (9.4). *Тогда*

$$\widehat{h}_k^{V_k}(F(\mathcal{A}), \phi_2) \le \alpha^{k-n-1}\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}, \phi_1), \tag{9.16}$$

где символом $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A},\phi)$ обозначена модифицированная топологическая энтропия множества $\mathcal{A}$ относительно полугруппы $\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_k}$, посчитанная в метрике весового пространства $L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)$. В частности, величины (9.15) *сохраняются при липшицевых гомеоморфизмах.*

Действительно, оценка (9.16) является немедленным следствием определения (9.15).

Следствие 9.2. *Для любых $\mu\in\mathbb{R}_+$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ справедлива следующая оценка:*

$$\kappa_1\widehat{h}_k^{V_k}(F(\mathcal{A}),\phi_2)\le\widehat{h}_k^{V_k}(F(\mathcal{A}),e^{-\mu|x-x_0|})\le\kappa_2\widehat{h}_k^{V_k}(F(\mathcal{A}),e^{-|x|}),\qquad(9.16')$$

где $\kappa_1:=\max\{1,\mu\}$, $\kappa_2=\min\{1,\mu\}$.

Действительно, правая часть оценки $(9.16')$ является немедленным следствием (9.16), очевидной оценки

$$\|v\|_{L^\infty_{e^{-\mu|x-x_0|}}}\le e^{\mu|x_0|}\|v\|^{\kappa_2}_{L^\infty_{e^{-|x|}}}\|v\|^{1-\kappa_2}_{L^\infty}$$

и ограниченности аттрактора $\mathcal{A}$ в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Левая часть неравенства $(9.16')$ доказывается совершенно аналогично.

Таким образом, величины $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A},e^{-\mu|x|})$, либо равны нулю при любом $\mu>0$, либо строго положительны при любом $\mu>0$. В дальнейшем мы вновь будем писать $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A})$ вместо $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A},e^{-|x|})$.

Замечание 9.4. Наиболее естественным выбором гиперплоскостей V_k являются следующие две возможности:

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}):=\widehat{h}_n^{\mathbb{R}^n_x}(\mathcal{A})\ \text{ and }\ \widehat{h}_t(\mathcal{A}):=\widehat{h}_1^{\mathbb{R}_t}(\mathcal{A}),\qquad(9.17)$$

которые отвечают случаю чисто пространственной или чисто временной части динамики на аттракторе. Положительность этих величин при выполнении некоторых естественных условий будет доказана в параграфах 10 и 13. Отметим, что и промежуточный (между $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}_t$) выбор гиперплоскости V_k, описывающий взаимодействие пространственных и временных мод, представляет независимый интерес.

Сформулируем теперь аналог предложения 9.1 и следствия 9.1 для случая модифицированных энтропий (9.15).

Предложение 9.3. *Пусть $W_k := V_k^\perp \cap \mathbb{R}^n_x$, где через $V_k^\perp$ обозначено ортогональное дополнение к гиперплоскости V_k, и пусть разложение $x = (x'', x')$ соответствует разложению $\mathbb{R}^n_x = (V_k \cap \mathbb{R}^n_x) \times W_k$. Разложим также $e_1 = e_1' + e_1''$, где $e_1' \in W_k$, $e_1'' \in \mathbb{R}_t$. Тогда величина* (9.15) *допускает следующее эквивалентное определение:*

$$\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) = \\ = \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-1} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^k} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te_1'|}}(V_k(R)\times W_k)\right), \tag{9.18}$$

где $V_k(R) := [0, Re_1''] \times ([0, Re_2] \times \cdots \times [0, Re_k])$. *В случае $e_k \in \mathbb{R}^n_x$ в соответствии с* (5.7) *нужно заменить $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$, а вектор e_1'' в определении $V_k(R)$ нужно заменить на $e_1 \in \mathbb{R}^n_x$ и выбрать $t = 0$ в весовой функции в правой части* (9.18).

Доказательство. Мы рассмотрим ниже лишь наиболее сложный случай $e_1'' \neq 0$ (случай $e_1'' = 0$, то есть, $V_k \subset \mathbb{R}^n_x$ рассматривается совершенно аналогично).

Из определения множества $\mathcal{K}$ и из определений (9.14) и (9.15) следует, что

$$\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) = \\ = \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n+1} \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R^k} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{\phi_R}([0, Re_1''] \times \mathbb{R}^n_x)\right), \tag{9.19}$$

где

$$\phi_R(t,x) := \sup_{l''\in[0,R]^{k-1}} e^{-|(x'-te_1', x''-l'')|}. \tag{9.20}$$

Заметим, что $\phi_R(t,x) \equiv e^{-|x'-te_1'|}$, если $x'' \in [0,R]^{k-1}$. Поэтому левая часть равенства (9.18) не меньше, чем правая. Более того,

$$\phi_R(t,x) \le e^{-|x'-te_1'|} e^{-\alpha\,\mathrm{dist}(x'',[0,R]^{k-1})} \tag{9.21}$$

для некоторого $\alpha > 0$, если $x'' \notin [0,R]^{k-1}$. Следовательно, существует константа $K > 0$, не зависящая от R, такая что

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{\phi_R}([0, Re_1''] \times \mathbb{R}^n_x\right) \le \\ \le \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te_1'|}}(V_k(R + 2K\ln 1/\varepsilon) \times W_k)\right). \tag{9.22}$$

Умножая (9.22) на R^{-k} и переходя к пределу $R \to \infty$, получим что левая часть равенства (9.18) не превосходит правой. Существование предела $R \to +\infty$ следует (как и в предложении 9.1) из субаддитивности функции

$$\begin{gathered}\Phi_k(R_1, \cdots, R_k) := \\ = \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te'_1|}}([0, R_1 e''_1] \times [0, R_2 e_2] \times, \cdots, \times [0, R_k e_k] \times W_k)\right). \end{gathered} \tag{9.23}$$

Предложение 9.3 доказано.

Замечание 9.5. В случае пространственной динамики $V_n = \mathbb{R}^n$ (9.18) принимает вид:

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R^n} \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, L^\infty([0, R]^n)\right), \tag{9.24}$$

аналогичный формуле (9.8) для величины $\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A})$. В частности, как и величина $\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A})$, величина (9.24) не зависит от выбора весовой функции ϕ, удовлетворяющей условию (9.5), используемой для метризации локальной топологии $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ на аттракторе, то есть

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}, \phi_1) = \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}, \phi_2) \tag{9.25}$$

для любых двух весовых функций $\phi_i(x)$, удовлетворяющих (9.5).

Заметим, что как и в случае $k = n+1$, величины (9.15) априори также могут быть бесконечными. Следующий аналог теоремы 9.1 показывает, что это не так в нашем случае.

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1. Тогда для любого $k \in [0, \cdots, n+1]$ и любой гиперплоскости $V_k \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ соответствующая модифицированная топологическая энтропия является конечной:*

$$\widehat{h}^{V_k}_k(\mathcal{A}) \le C < \infty. \tag{9.26}$$

Доказательство. Мы проверим оценку (9.26) только для случая $e''_1 \ne 0$ (случай $e''_1 = 0$ рассматривается совершенно аналогично).

Использовав субаддитивность функции (9.23), получим, что для любого $R > \ln 1/\varepsilon$ справедлива оценка

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te_1'|}}(V_k(R)\times W_k)\right) \leq \\ \leq \left(\frac{R}{\ln 1/\varepsilon}+1\right)^k \mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te_1'|}}(V_k(\ln 1/\varepsilon)\times W_k)\right). \quad (9.27)$$

Заметим теперь, что если $t \in [0, \ln 1/\varepsilon]$, то

$$\varepsilon e^{-|x'|} \leq e^{-|x'-te_1'|} \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{-|x'|} \quad (9.28)$$

и, следовательно, благодаря ограниченности множества $\mathcal{K}$ в L^∞ и оценке (7.36), получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te_1'|}}(V_k(\ln 1/\varepsilon)\times W_k)\right) \leq \\ \leq \mathbb{H}_{\varepsilon^2}\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'|}}(V_k(\ln 1/\varepsilon)\times W_k)\right) \leq \\ \leq \mathbb{H}_{\varepsilon^2}\left(\mathcal{K}, L^\infty(V_k(\ln 1/\varepsilon)\times [0, K\ln 1/\varepsilon]^{n+1-k})\right) \leq \\ \leq \mathbb{H}_{\varepsilon^2}\left(\mathcal{K}, L^\infty([0, K_1\ln\frac{1}{\varepsilon^2}]^{n+1})\right) \leq C\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}.$$

Подставив эту оценку в неравенство (9.27), мы получим оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te_1'|}}(V_k(R)\times W_k)\right) \leq \\ \leq C_1 R^k\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1-k} + C_2 R^{k-1}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1}.$$

Подставив последнюю оценку в формулу (9.18), мы получим оценку (9.26). Теорема 9.2 доказана.

Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между топологическими энтропиями (9.15), соответствующими различным гиперплоскостям V_k.

Теорема 9.3. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1. Тогда существует положительное число L, такое что для любых двух гиперплоскостей $V_k, V_{k'} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$, таких что $V_{k'} \subset V_k$ справедливо неравенство*

$$\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) \le L^{k-k'} \widehat{h}_{k'}^{V_{k'}}(\mathcal{A}). \tag{9.29}$$

Доказательство. Достаточно доказать оценку (9.29) лишь для случая $k' = k-1$, то есть $V_k = V_{k'} \times \{\mathbb{R}e\}$, где $e \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$. Более того, при подходящем выборе $e \in V_k \backslash V_{k'}$ достаточно рассмотреть лишь два случая:

1. $V_{k'} \subset \mathbb{R}^n_x$, но V_k содержит временные направления, то есть $e \notin \mathbb{R}^n_x$.
2. Добавляется чисто пространственное направление $e \in \mathbb{R}^n_x$.

Рассмотрим первый случай. Зафиксируем базис $\{e_1, \cdots, e_k\}$ в гиперплоскости V_k таким образом, чтобы $e_1 = e$, а векторы $\{e_2, \cdots, e_k\}$ образовывали базис в $V_{k'} \subset \mathbb{R}^n_x$. Предположим теперь, что

$$\widehat{h}_{k-1}^{V_{k'}}(\mathcal{A}) = \alpha \tag{9.30}$$

для некоторого $\alpha > 0$. Тогда, из определения величины (4.15) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{k-n-2} \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R^{k-1}} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, L^\infty_{\phi_R}(\mathbb{R}^n) \right) = \alpha, \tag{9.31}$$

где $\phi_R(x) := \sup_{l'' \in [0,R]^{k-1}} e^{-|x'+x''-l''|}$, а разложение $x = x' + x''$ соответствует разложению $\mathbb{R}^n_x = V_{k-1}^{\perp} \times V_{k-1}$

Заметим, что весовая функция $\phi_R(x)$ является весовой функцией экспоненциального роста $\mu = 1$, более того, она удовлетворяет условию (1.5) с константой $C_{\phi_R} = 1$. Поэтому, согласно теореме 4.2 и оценке (1.19), для любых $u_0, v_0 \in \mathcal{A}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|S_1 u_0 - S_1 v_0\|_{W^{2,q}_{b,\phi_R^q}(\mathbb{R}^n)} \le \\ &\qquad \le C_1 \|u_0 - v_0\|_{L^q_{b,\phi_R^q}(\mathbb{R}^n)} \le C_2 \|u_0 - v_0\|_{L^\infty_{\phi_R}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{9.32}$$

с константами C_i, не зависящим от R и $u_0, v_0 \in \mathcal{A}$. Из оценки (9.32) и инвариантности аттрактора относительно S_t следует, что

$$\mathbb{H}_{\varepsilon/C_2} \left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{b,\phi_R^q}(\mathbb{R}^n) \right) \le \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{A}, L^\infty_{\phi_R}(\mathbb{R}^n) \right). \tag{9.33}$$

Аналогично, из оценки (4.1) с $T \in [0, \ln \frac{1}{\varepsilon}]$ следует, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{\phi_R}([0, \ln 1/\varepsilon] \times \mathbb{R}^n)\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{H}_{\varepsilon/C_1} \left(\mathcal{K}, L^\infty([0, \ln 1/\varepsilon], W^{2,q}_{b,\phi^q_R}(\mathbb{R}^n))\right) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon^m/C_2} \left(\mathcal{A}, L^\infty_{\phi_R}(\mathbb{R}^n)\right) \quad (9.34)$$

для некоторого $m > 0$. Из оценок (9.28) и (9.34) следует теперь, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te'_1|}}([0, (\ln 1/\varepsilon)e''_1] \times V'_{k-1}(R) \times W_{k-1})\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{H}_{\varepsilon^2} \left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'|}}([0, (\ln 1/\varepsilon)e''_1] \times V'_{k-1}(R) \times W_{k-1})\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{H}_{\varepsilon^2} \left(\mathcal{K}, L^\infty_{\phi_R}([0, \ln 1/\varepsilon] \times \mathbb{R}^n)\right) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon^{2m}/C_3} \left(\mathcal{A}, L^\infty_{\phi_R}(\mathbb{R}^n)\right), \quad (9.35)$$

где $V'_{k-1}(R) := [0, Re_2] \times \cdots \times [0, Re_k]$.

Из оценки (9.31) и (9.35) мы получаем, что для любого $\mu > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{k-1}} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te'_1|}}([0, \ln \frac{1}{\varepsilon} e''_1] \times V'_{k-1}(R) \times W_{k-1})\right) \leq$$
$$\leq ((2m)^{n+2-k}\alpha + \mu) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+2-k}.$$

Использовав субаддитивность функции (9.23), мы получим из последней оценки

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{k-1}} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x'-te'_1|}}([0, Te''_1] \times V'_{k-1}(R) \times W_{k-1})\right) \leq$$
$$\leq (L\alpha + \mu) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1-k}$$

и, следовательно,

$$\widehat{h}^{V_k}_k(\mathcal{A}) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-1} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{k-1}} \mathbb{H}_\varepsilon (\mathcal{K},$$
$$L^\infty_{e^{-|x'-te'_1|}}([0, Te''_1] \times V'_{k-1}(R) \times W_{k-1})\Big) \leq L\alpha.$$

Итак, для первого случая оценка (9.29) доказана.

Рассмотрим теперь второй случай ($e \in \mathbb{R}^n_x$). Предположим снова, что выполнено равенство (9.30). Выберем теперь ортонормированный базис $\{e_1, \cdots, e_k\}$ в гиперплоскости V_k таким образом, чтобы $e_i \in \mathbb{R}^n_x$ для $i = 2, \cdots, k$ и вектора $\{e_1, \cdots, e_{k-1}\}$ образовывали бы базис в V_{k-1}. Предположим для определенности также, что $e_1'' \neq 0$ (случай $e_1'' = 0$ рассматривается совершенно аналогично). Пусть разложение $x = x'' + x' + y$ пространственной переменной $x \in \mathbb{R}^n$ соответствует разбиению в прямую сумму $\mathbb{R}^n_x = (V_{k-1}^{\perp} \cap \mathbb{R}^n_x) \oplus W_k \oplus \{\mathbb{R}e_k\}$. Тогда, согласно предложению 9.3

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-2} \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R^{k-1}} \mathbb{H}_\varepsilon \big(\mathcal{K}, \\ L^\infty_{e^{-|(x'-te_1',y)|}}(V_{k-1}(R) \times W_{k-1})\Big) = \alpha. \tag{9.36}$$

Используя очевидную оценку

$$e^{-|(x'-te_1'',y)|} \geq \varepsilon e^{-|x'-te_1'|} \quad \text{for} \quad |y| \leq \ln 1/\varepsilon$$

и равенство (9.36), получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n-2} \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R^{k-1}} \mathbb{H}_\varepsilon \big(\mathcal{K}, \\ L^\infty_{e^{-|x'-te_1'|}}(V_{k-1}(R) \times [0, e_k \ln \frac{1}{\varepsilon}] \times W_k)\Big) \leq 2^{n+2-k}\alpha. \tag{9.37}$$

Используя субаддитивность функции (9.23), так же, как и в доказательстве оценки (9.29) в первом случае, мы выведем оценку (9.29) и для второго случая. Теорема 9.3 доказана.

Замечание 9.6. Оценка (9.29) является обобщением классического результата о связи между фрактальной размерностью инвариантного множества и топологической энтропией для липшицевых динамических систем с одномерным временем:

$$h_{top}(\mathcal{A}) \leq L \dim_F(\mathcal{A}). \tag{9.38}$$

Действительно, в случае одномерного 'времени' ($n = 0$), очевидно, $\widehat{h}_0(\mathcal{A}) = \dim_F(\mathcal{A})$ и $\widehat{h}_1(\mathcal{A}) = h_{top}(\mathcal{A})$.

Следствие 9.3. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1 и пусть известно дополнительно, что топологическая энтропия $\widehat{h}_{n+1}(\mathcal{A}) > 0$. Тогда для любого $k \in \{0, \cdots, n+1\}$ и любой k-мерной гиперплоскости V_k соответствующая энтропия строго положительна: $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) > 0$.*

Обратно, если 0-мерная энтропия равна нулю, то есть

$$d_{n+1}(\mathcal{A}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-n-1}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}, L^\infty(B_0^{\ln 1/\varepsilon})\right) = 0, \tag{9.39}$$

то, для любой гиперплоскости V_k, соответствующая (модифицированная) топологическая энтропия $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A})$ равна нулю.

Замечание 9.7. Нетрудно проверить, что величина (9.39) связана с нуль-мерной топологической энтропией $\widehat{h}_0(\mathcal{A})$ следующим соотношением

$$C^{-1}d_{n+1}(\mathcal{A}) \le \widehat{h}_0(\mathcal{A}) \le Cd_{n+1}(\mathcal{A}) \tag{9.40}$$

для некоторой константы $C > 0$, зависящей только от n и K из условия (3.5). Более того, как показывает замечание 9.6 и следствие 9.3, величина $d_{n+1}(\mathcal{A})$ может быть интерпретирована как естественное обобщение фрактальной размерности на многомерный случай.

Рассмотрим в заключение этого параграфа альтернативную возможность введения величин, эквивалентных $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A})$, при которой пространственные и временные направления рассматриваются с единой точки зрения. Для этого мы наделим множество $\mathcal{K}$ всех полных решений задачи (3.1) метрикой, индуцированной вложением в весовое пространство $L^\infty_\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ с весовой функцией $\psi(t,x) := e^{-\left(t^2+|x|^2\right)^{1/2}}$. Тогда, очевидно, группа сдвигов вдоль пространственно-временных направлений действует на $\mathcal{K}$

$$\mathbb{T}_{(s,h)}\mathcal{K} = \mathcal{K}, \quad (\mathbb{T}_{(s,h)})u(t,x) := u(t+s, x+h), \quad s\in\mathbb{R}, \quad h\in\mathbb{R}^n. \tag{9.41}$$

Поэтому, аналогично определению 9.2, мы можем определить величины (9.15) для динамической системы (9.41). Обозначим их через $\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K})$. Следующее полезное предложение показывает, что эти величины оказываются эквивалентны ранее введенным.

Предложение 9.4. *Пусть выполнены условия теоремы 9.1. Тогда*
$$C^{-1}\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}) \le \widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) \le C\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}) \tag{9.42}$$
для некоторой константы C, зависящей только от n и K из условия (3.5).

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{K}^+ := \mathcal{K}\big|_{t\ge 0}$. Тогда, согласно теореме 4.1, разрешающий оператор задачи (3.1) осуществляет липшицевый гомеоморфизм множеств
$$\left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{b,e^{-q|x|}}(\mathbb{R}^n)\right) \to \left(\mathcal{K}^+, L^\infty_{e^{-K|t|}}(\mathbb{R}_+, W^{2,q}_{b,e^{-q|x|}}(\mathbb{R}^n))\right). \tag{9.43}$$
Заметим также, что этот гомеоморфизм переводит динамическую систему $\mathbb{S}_{(t,h)}$ в траекторную динамическую систему $\{\mathbb{T}_{(t,h)}, t\in\mathbb{R}_+\}$, определенную формулой (9.41). Более того, из теоремы 4.2 следует, что оператор S_1 осуществляет сюръективное липшицево отображение
$$S_1 : \left(\mathcal{A}, L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)\right) \to \left(\mathcal{A}, W^{2,q}_{b,e^{-q|x|}}(\mathbb{R}^n)\right). \tag{9.44}$$
Таким образом, из (9.43), (9.44), очевидного вложения $W^{2,q}_{b,e^{-q|x|}}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)$ и сохранения энтропий (9.15) при липшицевых отображениях (см. предложение 9.2) следует
$$\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}, e^{-|x|}) = \widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}^+, e^{-Kt-|x|}). \tag{9.45}$$
Для перехода к стандартной метрике $L^\infty_\psi(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)$ на множестве $\mathcal{K}^+$ достаточно воспользоваться следствием 9.2. Таким образом,
$$C^{-1}\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}^+) \le \widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{A}) \le C\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}^+) \tag{9.46}$$
для некоторой константы $C = C(K)$. Для завершения доказательства предложения остается показать, что
$$\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}^+) \le \widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}) \le 2^{n+1-k}\widehat{h}_k^{V_k}(\mathcal{K}^+). \tag{9.47}$$
Действительно, левая часть (9.47) очевидна. Докажем ее правую часть. Для этого заметим, что из очевидных неравенств
$$\psi(t,x) \le \varepsilon \text{ при } |t| \ge \ln\frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{и} \quad \psi(t-\ln\frac{1}{\varepsilon}, x) \le \frac{1}{\varepsilon}\psi(t,x)$$
и трансляционной инвариантности множества $\mathcal{K}$ следует
$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, d_{R,V_k}) \le \mathbb{H}_\varepsilon(\mathcal{K}\big|_{t\ge -\ln\frac{1}{\varepsilon}}, d_{R,V_k}\right) \le \mathbb{H}_{\varepsilon^2}(\mathcal{K}^+, d_{R,V_k}). \tag{9.48}$$
Правая часть оценки (9.47) является немедленным следствием неравенства (9.48). Предложение 9.4 доказано.

§10 Пространственный хаос.

В этом параграфе мы продолжим исследование аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (3.1) в пространственно-однородном случае (то есть, при выполнении условий (9.1)), начатое в параграфах 8 и 9. Напомним, что в этом случае динамическая система

$$T_h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (T_h u)(x) := u(x+h), \ h \in \mathbb{R}^n, \tag{10.1}$$

порожденная пространственными сдвигами, действует на аттракторе $\mathcal{A}$. Основной целью данного параграфа является более детальное исследование динамических свойств группы (10.1). Мы начнем со следующей теоремы, являющейся простым следствием теоремы 8.2.

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы 8.2. Тогда топологическая энтропия динамической системы* (10.1) *является бесконечной*

$$h_{sp}(\mathcal{A}) = \infty. \tag{10.2}$$

Более того, модифицированная топологическая энтропия строго положительна:

$$0 < C_1 \le \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}) \le C_2 < \infty. \tag{10.3}$$

Действительно, конечность величины $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A})$ следует из теоремы 9.2, а ее строгая положительность немедленно следует из оценки (8.53) и формулы (9.24).

Таким образом, при выполнении условий теоремы 8.2, пространственная динамическая система (10.1) является хаотической и, более того, ее топологическая энтропия оказывается бесконечной. Для более явного описания природы хаоса, возникающего в пространственной динамической системе (10.1), естественно построить гомеоморфное вложение некоторой модельной хаотической динамической системы $(\widehat{T}_h, \mathcal{M})$, поведение траекторий которой допускает полное описание, в исследуемую динамическую систему $(T_h, \mathcal{A})$. В случае классических динамических систем в качестве такой модельной динамической системы обычно используются схемы Бернулли с конечным числом символов, см., например, [63]. Заметим, однако, что схема Бернулли с конечным числом символов имеет конечную топологическую энтропию и, следовательно, не является адекватной моделью для систем с бесконечной энтропией.

Поэтому, для исследования пространственного хаоса в системе (10.1) мы будем использовать следующий многомерный аналог схем Бернулли с континуальным числом символов.

Определение 10.1. Пусть $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ – единичный диск в $\mathbb{C}$. Определим пространство $\mathcal{M} := \mathbb{D}^{\mathbb{Z}^n}$ и наделим его стандартной тихоновской топологией. Напомним, что по определению пространство $\mathcal{M}$ состоит из всех функций $v : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, а топология в нем совпадает с локально-компактной топологией пространства $C_{loc}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$. Определим динамическую систему $\{\mathcal{T}_l, l \in \mathbb{Z}^n\}$ на $\mathcal{M}$ по следующей стандартной формуле:

$$(\mathcal{T}_l v)(m) := v(l+m), \quad l, m \in \mathbb{Z}, \quad v \in \mathcal{M}. \tag{10.4}$$

Заметим, что топология в $\mathcal{M}$ может быть метризована, например, следующим стандартным образом:

$$d_\phi(v_1, v_2) := \sup_{l \in \mathbb{Z}^n} \{\phi(l)|v_1(l) - v_2(l)|\}, \tag{10.5}$$

где $\phi(x) > 0$ – произвольная весовая функция, удовлетворяющая условию (9.5). Аналогично параграфу 9, мы можем определить топологическую энтропию $h_{sp}(\mathcal{M})$ и модифицированную топологическую энтропию $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M})$ для модельной динамической системы $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$. Напомним, что величина $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M})$ определяется следующим образом:

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M}) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R^n} \mathbb{H}_\varepsilon \left(\mathcal{M}, d_\phi^R\right), \tag{10.6}$$

где $d_\phi^R(v_1, v_2) := \sup\{d_\phi(\mathcal{T}_l v_1, \mathcal{T}_l v_2), \quad l = (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{Z}^n, \ 0 \le l_i \le R\}$.

Предложение 10.1. *Модифицированная энтропия $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M})$ не зависит от выбора весовой функции ϕ и вычисляется по формуле:*

$$\widehat{h}_{sp}(\mathcal{M}) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R^n} \mathbb{H}_\varepsilon (\mathcal{M}\big|_{[0,R]^n}) = \dim \mathbb{D} = 2 \tag{10.7}$$

и, таким образом, топологическая энтропия $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ бесконечна:

$$h_{sp}(\mathcal{M}) = \infty. \tag{10.8}$$

Доказательство этого предложения является совершенно стандартным и поэтому здесь не приводится.

Предложение 10.1 показывает, что динамическая система $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$, введенная в определении 10.1, может быть адекватной моделью для исследования пространственного хаоса в динамической системе (10.1). Следующая теорема показывает, что это действительно так.

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия* (8.3) *и* (9.1). *Тогда существует положительное число* $\alpha > 0$ *и гомеоморфное вложение*

$$\kappa : \mathcal{M} \to \mathcal{A}, \tag{10.9}$$

такое что

$$\kappa(\mathcal{T}_l v) = T_{\alpha l}\kappa(v), \quad l \in \mathbb{Z}^n, \quad v \in \mathcal{M}. \tag{10.10}$$

Более того, отображение $\kappa : \mathcal{M} \to \kappa(\mathcal{M})$ *является липшицевым в следующем смысле:*

$$C_1 d_\phi(v_1, v_2) \le \|\tau(v_1) - \tau(v_2)\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le C_2 d_\phi(v_1, v_2), \tag{10.11}$$

где $\phi(x)$ *произвольная весовая функция степенного роста* $\nu < 1$.

Доказательство. Напомним, что в теореме 8.1 было построено вложение $\mathcal{U}_0 : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$, где $\mathbb{K} := B(r, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$, перестановочное с группой пространственных сдвигов. Другими словами, построено гомеоморфное вложение

$$\mathcal{U}_0 : (T_h, \mathbb{K}) \to (T_h, \mathcal{A}). \tag{10.12}$$

Более того, для любой весовой функции ϕ степенного роста $\mu < \mu_0$ и любых $u_0^1, u_0^2 \in \mathbb{K}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} C_1\|u_0^1 - u_0^2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le \\ \le \|\mathcal{U}_0(u_0^1) - \mathcal{U}_0(u_0^2)\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)} \le C_2\|u_0^1 - u_0^2\|_{L^\infty_\phi(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \tag{10.13}$$

см. следствия 8.4 и 8.5. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно построить гомеоморфное вложение модельной системы $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ в динамическую систему $(T_{\alpha l}, \mathbb{K})$, действующую на пространстве $\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ целых функций экспоненциального роста. Для этой цели естественно воспользоваться интерполяционной формулой Котельникова-Картрайт (см., например, [14], [45]).

Предложение 10.2. *Любая функция $u \in \mathbb{B}_{\sigma',\xi_0}$ представляется в виде ряда:*

$$u(x) = \Sigma_{l\in\mathbb{Z}^n} u(\delta k) g_{\rho,k}(x), \quad \rho > 0, \tag{10.14}$$

где $\alpha = \frac{\pi}{\sigma'+\rho}$ и

$$g_{\rho,k}(x) := e^{i\xi_0\cdot(x-\delta k)} \varPi_{j=1}^n \frac{\sin\rho(x^j - \alpha k^j)\cdot\sin(\sigma'+\rho)(x^j-\alpha k^j)}{\rho(\sigma'+\rho)(x^j-\alpha k^j)^2}. \tag{10.15}$$

Более того, $g_{\rho,k} \in \mathbb{B}_{\sigma'+2\rho,\xi_0}$.

Зафиксируем теперь $\sigma', \rho > 0$ таким образом, чтобы $\sigma' + 2\rho < \sigma$ и определим отображение $\kappa_1 : \mathcal{M} \to \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$ по формуле

$$\kappa(v) := \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} v(l) g_{\rho,l}(x), \tag{10.16}$$

где функции $g_{\rho,l}$ такие же как и в (10.15). Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 10.1. *Для любого $0 < \nu < 1$ справедлива оценка*

$$|\kappa_1(v)(x)| \le C \sup_{l\in\mathbb{Z}^n} |v(l)| \left(\varPi_{j=1}^n (1 + |x^j - l^j|^2)\right)^{-\nu/2}. \tag{10.17}$$

Более того, для любого $R > \sqrt{n}$,

$$\|\kappa_1(v), B_0^{\alpha R}\|_{0,\infty} \ge \|v, B_0^R\|_{0,\infty}. \tag{10.18}$$

Доказательство. Действительно, оценка (10.18) немедленно следует из того факта, что $\kappa_1(v)(\alpha l) = v(l)$ для любого $l \in \mathbb{Z}$, а оценка (10.17) следует из очевидной оценки

$$|g_{\rho,l}(x)| \le \frac{C}{\varPi_{j=1}^n (1 + |x^j - l^j|^2)}, \quad l \in \mathbb{Z}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{10.19}$$

Таким образом,

$$\|\kappa(\mathcal{M})\|_{L_b^\infty(\mathbb{R}^n)} \le K \tag{10.20}$$

для некоторой константы $K > 0$. Более того, из оценок (10.18), (10.19) и (1.21) следует, что для любой ϕ степенного роста $\nu < 1$ справедлива оценка:

$$C_1\|v\|_{\mathcal{M}_{b,\phi}} \le \|\kappa_1(v)\|_{L^\infty_{b,\phi}} \le C_2\|v\|_{\mathcal{M}_{b,\phi}}. \tag{10.21}$$

Заметим также, что вложение κ_1 линейно и перестановочно с пространственными сдвигами, точнее

$$\kappa_1 \circ \mathcal{T}_l = T_{\alpha l} \circ \kappa_1. \tag{10.22}$$

Действительно, последнее равенство немедленно следует из того, что $\kappa_1(v)(\alpha l) \equiv v(l)$. Определив окончательно

$$\kappa(v) := \mathcal{U}_0(\frac{r}{K}\kappa(v)),$$

где r радиус шара $\mathbb{K}$, а K определено в (10.20), мы получим вложение, удовлетворяющее всем условиям теоремы. Теорема 10.2 доказана.

Таким образом, мы построили липшицево вложение

$$\kappa : (\mathcal{T}_l, \mathcal{M}) \to (T_{\alpha l}, \mathcal{A}). \tag{10.23}$$

Более того, так как модифицированная топологическая энтропия сохраняется при липшицевых гомеоморфизмах, то

$$2 = \widehat{h}_{sp}(\mathcal{M}) = \alpha\widehat{h}_{sp}(T_{\alpha l}, \kappa(\mathcal{M})) = \alpha\widehat{h}_{sp}(T_h, \kappa(\mathcal{M})) \tag{10.24}$$

и, следовательно, образ $\mathcal{M}$ также имеет положительную модифицированную энтропию.

Замечание 10.1. Существенным недостатком модифицированной топологической энтропии $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A})$ является ее несохранение при гомеоморфизмах. Этот недостаток может быть устранен следующим образом. Введем, следуя [66], величину

$$\widehat{H}_{sp}(\mathcal{A}) := \inf_d \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}), \tag{10.25}$$

где минимум берется по всем возможным метрикам, задающим топологию на $\mathcal{A}$, эквивалентную локальной топологии, порожденной вложением $\mathcal{A} \subset L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что так введенная величина является топологическим инвариантом. Более того, известно (см. [66]), что $\widehat{H}_{sp}(\mathcal{M}) = 2$. Поэтому, из теоремы 10.2 следует также, что

$$\widehat{H}_{sp}(\mathcal{A}) \geq 2\alpha^{-1} > 0.$$

Замечание 10.2. Как показывает доказательство теоремы 10.2, группа пространственных сдвигов T_h, действующая на единичном шаре пространства $\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ может рассматриваться как модельная динамическая система с непрерывным 'временем' $h \in \mathbb{R}^n$ для изучения пространственного хаоса, порождаемого уравнениями реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$. Однако, для выявления хаотической природы этой модельной системы, проще всего перейти к дискретному 'времени' и воспользоваться формулой Котельникова-Картрайт.

Следующее простое следствие доказанной теоремы показывает, что любая конечномерная динамика может быть реализована с точностью до гомеоморфизма ограничением пространственной динамической системы $(T_{\alpha l}, \mathcal{A})$ на подходящее инвариантное подмножество.

Следствие 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы 10.2 и пусть $K \subset \mathbb{C}^N$ – произвольное компактное подмножество в $\mathbb{C}^N$, на котором заданы n произвольных попарно коммутирующих гомеоморфизмов*

$$F_i : K \subset K, \quad F_i \circ F_j = F_j \circ F_i, \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{10.26}$$

Тогда существует гомеоморфное вложение $\tau : K \to \mathcal{A}$, такое что

$$T_{\alpha M \vec{e}_i} \circ \tau(k) = \tau \circ F_i(k), \quad k \in K, \quad i = 1, \cdots, N, \tag{10.27}$$

где $M \in \mathbb{N}$ – наименьшее целое число, такое что $M^n \geq N$, а $\vec{e}_i$ – i-тый координатный вектор в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Благодаря теореме 10.2, достаточно построить вложение $\widehat{\tau} : K \to \mathcal{M}$. Более того, без ограничения общности можно считать, что $K \subset \mathbb{D}^{M^n}$. Занумеруем координатные векторы в $\mathbb{C}^{M^n}$ последовательностями $(k_1, \cdots, k_n)$, $k_i \in \{0, \cdots, M-1\}$ и обозначим через

$(z)_{k_1,\cdots,k_n}$ соответствующую координату точки $z \in K$. Тогда искомое вложение задается, например, следующей формулой:

$$\widehat{\tau}(z)(l_1,\cdots,l_n) := \left(F_1^{(n_1)} \circ \cdots \circ F_n^{(n_n)}(z)\right)_{k_1,\cdots,k_n},$$
$$\text{где } l \in \mathbb{Z}^n,\ l_i = n_i M + k_i,\ n_i \in \mathbb{Z},\ k_i \in \{0,1,\cdots,M-1\},\ z \in K. \quad (10.28)$$

Здесь через $F_i^{(n_i)}$ обозначена n_i-тая итерация гомеоморфизма F_i. Нетрудно проверить, что отображение $\tau := \kappa \circ \widehat{\tau}$ удовлетворяет всем условиям следствия. Следствие 10.1 доказано.

Заключительная часть этого параграфа посвящена исследованию эволюции во времени пространственно–хаотических структур на аттракторе $\mathcal{A}$. Заметим, прежде всего, что образ схемы Бернулли $\mathcal{M}$ при вложении κ принадлежит экспоненциально неустойчивому многообразию положения равновесия и, следовательно, заведомо не является инвариантным относительно временной динамики. Поэтому, представляет интерес исследовать пространственную динамику на множествах S_tB, где B – некоторое пространственно-инвариантное множество, и ее зависимость от t. Заметим, что S_tB также является пространственно-инвариантным, если B – пространственно-инвариантно, то есть для любого $t \geq 0$

$$T_h : S_tB \to S_tB, \quad h \in \mathbb{R}^n. \quad (10.29)$$

Поэтому корректно определены топологическая энтропия $h_{sp}(S_tB)$ и модифицированная топологическая энтропия $\widehat{h}_{sp}(S_tB)$ пространственной динамической системы (10.29), которые априори являются функциями времени. Следующая теорема показывает, что в действительности (при выполнении некоторого технического условия) эти величины не зависят от времени.

Теорема 10.3. *Пусть выполнено условие пространственной однородности* (9.1) *и техническое условие* $aa^* = a^*a$. *Тогда для любого пространственно-однородного подмножества* $B \subset \mathcal{A}$ *справедливы равенства:*

$$h_{sp}(S_tB) = h_{sp}(B) \quad \text{и} \quad \widehat{h}_{sp}(S_tB) = \widehat{h}_{sp}(B), \quad t \geq 0. \quad (10.30)$$

Доказательство. Напомним, что, согласно оценке (4.11) и вложению $W^{2,q} \subset L^\infty$,

$$\|S_t u_1 - S_t u_2\|_{L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)} \le C(t)\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)} \tag{10.31}$$

для любых $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$. Поэтому

$$h_{sp}(S_t B) \le h_{sp}(B) \ \text{ и } \ \widehat{h}_{sp}(S_t B) \le \widehat{h}_{sp}(B). \tag{10.32}$$

Таким образом, остается доказать обратные неравенства. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любых $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$, любого $t > 0$ и любого $0 < \alpha < 1$ существует $C = C(T, \alpha)$, такое что*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{e^{-\alpha|x|}}(\mathbb{R}^n)} \le C\|S_t u_1 - S_t u_2\|^\alpha_{L^\infty_{e^{-|x|}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{10.33}$$

Доказательство. Действительно, пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – полные ограниченные решения, соответствующие точкам $u_i \in \mathcal{A}$ ($u_i(0) = u_i \in \mathcal{A}$). Тогда из оценки (4.24) (примененной в точке $t_0 = -1$ вместо $t_0 = 0$) следует, что

$$\|u_1(-1) - u_2(-1)\|_{L^2_{e^{-\alpha\varepsilon|x|}}(\mathbb{R}^n)} \le C_\varepsilon \|u_1(t) - u_2(t)\|^\alpha_{L^2_{e^{-\varepsilon|x|}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{10.34}$$

Применив теперь сглаживающую оценку (4.11) на временном интервале $t \in [-1, 0]$ и использовав оценку (10.34) вместе с вложением $W^{2,q} \subset L^\infty$ мы получим неравенство (10.34). Лемма 10.2 доказана.

Таким образом, обратное преобразование $S_{-t} := (S_t)^{-1}$ является гельдеровым на аттракторе $\mathcal{A}$ с показателем гельдеровости α, сколь угодно близким к единице. Использовав теперь тот факт, что $\widehat{h}_{sp}$ не зависит от выбора весовой функции (см. замечание 9.5) и формулу (9.16), мы получим, что

$$h_{sp}(B) \le h_{sp}(S_t B), \ \text{ и } \ \widehat{h}_{sp}(B) \le \widehat{h}_{sp}(S_t B).$$

Теорема 10.3 доказана.

Замечание 10.3. Напомним, что согласно теореме 10.2, существует множество $B = \kappa(\mathcal{M})$, такое что $(T_{\alpha l}, B)$ гомеоморфна сдвигу Бернулли $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$. Оценки (10.31) и (10.33) показывают, что $(T_{\alpha l}, S_t B)$ остается гомеоморфной сдвигу Бернулли для любого $t \geq 0$. Таким образом, пространственный хаос, построенный в теореме 10.2, сохраняется при эволюции во времени.

Введем теперь некоторые количественные характеристики пространственной сложности индивидуальных траекторий, лежащих на аттракторе.

Определение 10.2. Пусть $u_0 \in \mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{H}_{sp}(u_0)$ замыкание орбиты точки u_0 под действием пространственной динамической системы:

$$\mathcal{H}_{sp}(u_0) := \left[T_h u_0, h \in \mathbb{R}^n\right]_{\Phi_{loc}}, \tag{10.35}$$

где через $[\cdot]_{\Phi_{loc}}$ обозначено замыкание в пространстве $W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, множество $\mathcal{H}_{sp}(u_0)$ является пространственно-однородным, поэтому корректно определены следующие величины:

$$h_{sp}(u_0) := h_{sp}(\mathcal{H}_{sp}(u_0)), \quad \widehat{h}_{sp}(u_0) := \widehat{h}_{sp}(\mathcal{H}_{sp}(u_0)). \tag{10.36}$$

Следующее простое следствие доказанной теоремы показывает, что эти величины сохраняются вдоль траекторий, лежащих на аттракторе.

Следствие 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы 10.3. Тогда для любого $u_0 \in \mathcal{A}$ справедливо равенство:*

$$h_{sp}(S_t u_0) = h_{sp}(u_0), \quad \widehat{h}_{sp}(S_t u_0) = \widehat{h}_{sp}(u_0), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10.37}$$

Более того, величина $\widehat{h}_{sp}(u_0)$ конечна для любого $u_0 \in \mathcal{A}$, и существуют $u_0 \in \mathcal{A}$, такие что

$$h_{sp}(u_0) = \infty, \quad \widehat{h}_{sp}(u_0) > C > 0. \tag{10.38}$$

Доказательство. Действительно, равенства (10.37) немедленно следуют из теоремы 10.3. Конечность величины $\widehat{h}_{sp}(u_0)$ следует из теоремы 9.2. Для построения $u_0 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющего (10.38), достаточно заметить, что схема Бернулли $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$ является топологически транзитивной, то есть существует $v_0 \in \mathcal{M}$, траектория которого плотна в $\mathcal{M}$. Выбрав теперь $u_0 = \kappa(v_0)$, мы получим точку аттрактора, удовлетворяющую (10.38). Следствие 10.3 доказано.

§11 Построение вспомогательной динамической системы.

Напомним, что в предыдущем параграфе мы доказали, что, при выполнении естественных условий, пространственная динамическая система $\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$, действующая на аттракторе уравнения (3.1), является хаотической. Более того, было дано описание пространственного хаоса при помощи гомеоморфного вложения схемы Бернулли с континуальным числом символов. Основная цель следующих трех параграфов – получить аналогичное описание и для временной динамики, порождаемой уравнением (3.1) на аттракторе. Для этой цели мы построим некоторую вспомогательную динамическую систему, для которой роль времени будет играть одно из пространственных направлений, а координата t окажется 'пространственной' переменной. Применив затем схему исследования пространственной динамики, изложенную в параграфах 8-10, к этой вспомогательной динамической системе, мы получим описание динамического хаоса в исходной динамической системе S_t (так как направление времени t является пространственным для построенной вспомогательной динамической системы).

Основной целью данного параграфа является построение вышеописанной вспомогательной динамической системы. Как и ранее, мы будем рассматривать лишь пространственно-однородный случай уравнения (3.1). Для простоты мы предположим также, что $z_0 \equiv 0$ является положением равновесия уравнения (3.1), то есть

$$\Omega = \mathbb{R}^n, \quad g \equiv 0 \quad , \quad L(x) := L \in \mathbb{R}^n, \ f(0) = 0. \tag{11.1}$$

Более того, без ограничения общности можно считать, что постоянное векторное поле L имеет вид

$$L := Le_1, \quad e_1 := (1, 0, \cdots, 0), \quad L \in \mathbb{R}_+ \tag{11.2}$$

(общий случай, очевидно, сводится к (11.2) при помощи подходящей линейной (ортогональной) замены пространственной координаты x).

Рассмотрим теперь следующую параболическую краевую задачу в полупространстве $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{cases} \partial_t u = a(\partial_{x_1}^2 u + \Delta_{x'} u) - L\partial_{x_1} u - \lambda_0 u - f(u), \\ u\big|_{x_1=0} = u^0, \quad x_1 \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \ x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases} \tag{11.3}$$

Мы рассмотрим эту задачу как (формальное) эволюционное уравнение относительно новой 'временной' переменной x_1. Для того, чтобы подчеркнуть эту идею, мы переобозначим независимые переменные следующим образом:

$$\eta := x_1, \qquad y = (y_1, \cdots, y_n) = (y_1, y') := (t, x'). \tag{11.5}$$

В этих новых переменных задача (11.3) примет вид:

$$\begin{cases} a(\partial_\eta^2 u + \Delta_{y'} u) - L\partial_\eta u - \lambda_0 u - f(u) = \partial_{y_1} u, & y \in \mathbb{R}^n, \quad \eta \geq 0, \\ u\big|_{\eta=0} = u^0. \end{cases} \tag{11.5}$$

Следующая теорема показывает, что уравнение (11.5) действительно определяет динамическую систему относительно переменной η, если число L достаточно велико.

Теорема 11.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и условие* (11.2). *Предположим также, что существует неотрицательное число $\Lambda_0 \geq 0$, такое что*

$$L\Lambda_0 - \left(a_+ - 2a_-(a_+)^{-1}a_-\right)\Lambda_0^2 - K > 0, \tag{11.6}$$

где $a_+ := 1/2(a + a^*)$, $a_- := 1/2(a - a^*)$, а константа K такая же, как и в условии (3.5). *Тогда, для любого*

$$u^0 \in \Psi_b(\mathbb{R}^n) := \{u^0, \partial_t u^0 \in W_b^{(1-1/(2q),2-1/q),q}(\mathbb{R}^n)\},$$

задача (11.5) *имеет единственное ограниченное решение $u(\eta, y)$, принадлежащее пространству*

$$u, \partial_t u \in W_b^{(1,2),q}\left(\mathbb{R}_t \times \left(\mathbb{R}_{+,x_1} \times \mathbb{R}_{x'}^{n-1}\right)\right). \tag{11.7}$$

Доказательство. Существование решения задачи (11.5) следует из теоремы 3.1 (при этом не требуется выполнения условия (11.6)). Действительно, пусть $u_0^N \in W_b^{2,q}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1})$ такое, что

$$\|u_0^N\|_{W_b^{2,q}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|u^0\|_{\Psi_b}, \quad \text{и } u_0^N\big|_{x_1=0} = u^0\big|_{t=-N}.$$

Очевидно, что такое u_0^N существует, более того, константа C может быть выбрана не зависящей от $N \in \mathbb{N}$. Тогда, согласно теореме 3.1, существует единственное решение $u^N(t)$ задачи (11.3), определенное при $t \geq -N$, такое что $u^N\big|_{t=-N} = u_0^N$. Более того, из оценки (3.13) следует

$$\|u^N(t), \Omega \cap B^1_{x_0}\|_{2,q} + \|\partial_t u^N(t), \Omega \cap B^1_{x_0}\|_{0,q} \leq Q(\|u^0\|_{\Psi_b}), \qquad (11.8)$$

где $\Omega := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, а функция Q не зависит от N и x_0. Переходя к пределу $N \to \infty$ и используя равномерную оценку (11.8), легко построить ограниченное решение $u(t)$ задачи (8.3), а из оценки (3.13) следует тогда, что это решение удовлетворяет следующей оценке:

$$\|u(t), \Omega \cap B^1_{x_0}\|_{2,q} + \|\partial_t u(t), \Omega \cap B^1_{x_0}\|_{0,q} \leq Q(\|u^0\|_{\Psi_b})e^{-\alpha x_1} + \mathrm{C}, \quad (11.9)$$

где Q, C и $\alpha > 0$ не зависят от t и x_0.

Покажем, что это решение принадлежит пространству (11.7). Для этого мы продифференцируем уравнение (11.3) по t и обозначим $w = \partial_t u$:

$$\partial_t w - a\Delta_x w + \lambda_0 w = h(t) := -L\partial_{x_1} w - f'(u)\partial_t u, \quad w\big|_{x_1=0} = \partial_t u^0. \quad (11.9')$$

Применив к уравнению (11.9′) оценку (2.23) в области Ω с весовой функцией $\phi(t,x) = e^{-\varepsilon(|t-T|+|x-x_0|)}$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число, а T и x_0 произвольны, получим

$$\|\partial_t u\|_{W_\phi^{(1,2),q}(\mathbb{R}\times\Omega)} \leq C\left(\|\partial_t u^0\|_{W_\phi^{(1-1/(2q),2-1/q),q}(\mathbb{R}\times\Omega)} + \right.$$
$$\left. + \|\nabla_x \partial_t u\|_{L^q_\phi(\mathbb{R}\times\Omega)} + \|f'(u)\partial_t u\|_{L^q(\mathbb{R}\times\Omega)}\right). \quad (11.9'')$$

Напомним, что показатель $q > n+1$ выбран так, чтобы $W_b^{(1,2),q}(\mathbb{R} \times \Omega) \subset C(\mathbb{R} \times \Omega)$, поэтому третье слагаемое в правой части (11.9′′) легко оценивается из (11.9). Второе слагаемое, как обычно, оценивается при помощи интерполяционного неравенства и оценки для L^q-нормы $\partial_t u$, полученной в (11.9). Поэтому, из (11.9′′) следует оценка:

$$\int_T^{T+1} \left(\|u(t), \Omega \cap B^1_{x_0}\|^q_{2,q} + \right.$$
$$\left. + \|\partial_t u(t), \Omega \cap B^1_{x_0}\|^q_{2,q} + \|\partial_t^2 u(t), \Omega \cap B^1_{x_0}\|^q_{0,q}\right) dt \leq$$
$$\leq Q(\|u^0\|_{\Psi_b})e^{-\alpha x_1} + \mathrm{C}_1, \quad (11.10)$$

где Q, C_1 и $\alpha > 0$ не зависят от x_0 и T. Таким образом, решение $u(t)$ действительно удовлетворяет (11.7). В частности, из (11.10) и теоремы вложения следует, что

$$\|u\|_{C_b^1(\mathbb{R}\times\Omega)} \le Q(\|u^0\|_{\Psi_b}), \tag{11.11}$$

для некоторой монотонной функции Q.

Докажем теперь единственность решения задачи (11.5) при выполнении условия (11.6). Действительно, пусть $u_1(\eta)$ и $u_2(\eta)$ – два решения этой задачи и пусть $v(\eta) := u_1(\eta) - u_2(\eta)$. Тогда эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} a(\partial_\eta^2 v + \Delta_{y'} v) - L\partial_\eta v - \lambda_0 v - l(\eta)v = \partial_{y_1} v, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad \eta \ge 0, \\ u\big|_{\eta=0} = 0, \end{cases} \tag{11.12}$$

где $l(\eta) := \int_0^1 f'(su_1(\eta) + (1-s)u_2(\eta))\,ds$. Заметим, что из условия (3.5) и неравенства (11.11) следует оценка

$$l(\eta) \ge -K \quad \text{и} \quad \|l\|_{C_b^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)} \le Q(\|u_i\big|_{\eta=0}\|_{\Psi_b}). \tag{11.13}$$

Введем функцию $\theta(\eta) := e^{-\Lambda_0\eta}v(\eta)$, где $\Lambda_0 \ge 0$ такое же, как и в условии (11.6). Тогда

$$a(\partial_\eta^2\theta + \Delta_{y'}\theta) - (L - 2a\Lambda_0)\partial_\eta\theta - \left(L\Lambda_0 - a\Lambda_0^2 - l(\eta)\right)\theta - \lambda_0\theta = \partial_{y_1}\theta. \tag{11.14}$$

Умножим уравнение (11.14) на функцию $\psi_\varepsilon(\eta, y)\theta(\eta)$, где $\psi_\varepsilon(\eta, y) := e^{-\varepsilon(|\eta-\eta_0|+|y-y_0|)}$, $\eta_0 \ge 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, а $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число, которое будет определено позднее, и проинтегрируем его по $(\eta, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ (так как v ограничено и $\Lambda_0 \ge 0$, то θ также ограничена, поэтому все интегралы, полученные ниже сходятся). Тогда, после интегрирования по частям, использования неравенства (2.16) и очевидных оценок, мы получим

$$\begin{aligned} &- \langle a_+\partial_\eta\theta.\partial_\eta\theta, \psi_\varepsilon\rangle - \langle a_+\nabla_{y'}\theta.\nabla_{y'}\theta, \psi_\varepsilon\rangle + 2\Lambda_0|\langle a_-\partial_\eta\theta.\theta, \psi_\varepsilon\rangle| - \\ &\qquad - \left\langle (L\Lambda_0 - a_+\Lambda_0^2 - K)\theta.\theta, \psi_\varepsilon\right\rangle + C\varepsilon\left\langle |\partial_\eta\theta|^2 + |\nabla_{y'}\theta|^2 + |\theta|^2, \psi_\varepsilon\right\rangle \ge 0. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Здесь и далее через $\langle u, v\rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Оценив третье слагаемое в (11.15) следующим образом:

$$2\Lambda_0 |\left\langle a_- \partial_\eta \theta.\theta, \psi_\varepsilon \right\rangle| \geq -1/2 \left\langle a_+ \partial_\eta \theta.\partial_\eta \theta, \psi_\varepsilon \right\rangle + 2\Lambda_0^2 \left\langle a_-(a_+)^{-1} a_- \theta.\theta, \psi_\varepsilon \right\rangle,$$

получим неравенство

$$\begin{aligned}
1/2 \left\langle a_+ \partial_\eta \theta.\partial_\eta \theta, \psi_\varepsilon \right\rangle + \left\langle a_+ \nabla_{y'} \theta.\nabla_{y'} \theta, \psi_\varepsilon \right\rangle + \\
\left\langle (L\Lambda_0 - (a_+ - 2a_-(a_+)^{-1} a_-)\Lambda_0^2 - K)\theta.\theta, \psi_\varepsilon \right\rangle \leq \\
\leq C\varepsilon \left\langle |\partial_\eta \theta|^2 + |\nabla_{y'} \theta|^2 + |\theta|^2, \psi_\varepsilon \right\rangle. \quad (11.16)
\end{aligned}$$

Напомним, что согласно условию (11.6) третье слагаемое в (11.16) является строго положительным, следовательно, существует положительная константа $\mu > 0$ (не зависящая от ε, η_0 и y_0), такая что

$$(\mu - C\varepsilon) \left\langle |\partial_\eta \theta|^2 + |\nabla_{y'} \theta|^2 + |\theta|^2, \psi_\varepsilon \right\rangle \leq 0. \quad (11.17)$$

Таким образом, при достаточно малом ε из (11.17) следует, что $\theta \equiv 0$. Теорема 11.1 доказана.

Следствие 11.1. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1. Тогда задача* (11.5) *определяет полугруппу* $\{\mathcal{S}_\eta, \eta \geq 0\}$ *в фазовом пространстве space* $\Psi_b(\mathbb{R}^n)$*:*

$$\mathcal{S}_\eta : \Psi_b \to \Psi_b, \quad \eta \geq 0, \quad \mathcal{S}_\eta u^0 := u(\eta), \quad (11.18)$$

где $u(\eta)$ *– единственное решение уравнения* (11.5) *с* $u(0) = u^0$*. Более того, справедлива оценка*

$$\|\mathcal{S}_\eta u^0\|_{\Psi_b} \leq Q(\|u^0\|_{\Psi_b}) e^{-\alpha\eta} + C \quad (11.19)$$

для некоторых положительных $\alpha > 0$ *и* $C > 0$ *и некоторой монотонной функции* Q*.*

Действительно, существование полугруппы следует из теоремы 11.1, а оценка (11.19) немедленное следствие оценки (11.10) и того факта, что пространство Ψ_b является пространством следов для функций из пространства (11.6).

Наша следующая задача – исследовать аналитические свойства полугруппы (11.19). В качестве первого шага мы покажем, что эта полугруппа является липшицевой в фазовом пространстве Ψ_b. Для этого, аналогично параграфу 1, мы введем весовые пространства:

$$\Psi_\phi := \{u^0, \partial_t u^0 \in W_\phi^{(1-1/(2q),2-1/q),q}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)\},$$
$$\Psi_{b,\phi} := \{u^0, \partial_t u^0 \in W_{b,\phi}^{(1-1/(2q),2-1/q),q}(\mathbb{R}\times\partial\Omega)\}$$

для любой весовой функции ϕ экспоненциального роста.

Теорема 11.2. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1. Тогда для любых двух ограниченных решений $u_1(\eta)$ и $u_2(\eta)$ задачи* (11.5) *(с различными начальными данными) справедлива оценка:*

$$\|u_1(\eta) - u_2(\eta)\|_{\Psi_{\phi_{\varepsilon,y_0}}} \le Ce^{(\Lambda_0-\varepsilon)\eta}\|u_1(0) - u_2(0)\|_{\Psi_{\phi_{\varepsilon,y_0}}}, \qquad (11.20)$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число, $\phi_{\varepsilon,y_0}(y) := e^{-\varepsilon|y-y_0|}$ а константа C зависит от ε и $\|u_i(0)\|_{\Phi_b}$, $i = 1, 2$ (но не зависит $y_0 \in \mathbb{R}^n$).

Proof. Как и в доказательстве теоремы теоремы 11.1, введем функцию $\theta(\eta) := e^{-\Lambda_0\eta}(u_1(\eta) - u_2(\eta))$. Тогда эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению (11.14) с ненулевым граничным условием $\theta\big|_{\eta=0} = u_1(0) - u_2(0)$.

Для сведения этого уравнения к случаю однородных граничных условий мы построим продолжение $w(t,x) = w(\eta,y)$ функции $w^0 := u_1(0) - u_2(0)$ с границы внутрь области $\mathbb{R}\times\Omega$, таким образом чтобы

$$w(t,x) \equiv 0, \quad \text{если} \quad x_1 > 2 \qquad (11.21)$$

и выполнялась оценка

$$\|w\|_{W^{(1,2),q}_{\phi_{\varepsilon,y_0}}(\mathbb{R}\times\Omega)} + \|\partial_t w\|_{W^{(1,2),q}_{\phi_{\varepsilon,y_0}}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C_\varepsilon\|w^0\|_{\Psi_{\phi_{\varepsilon,y_0}}} \qquad (11.22)$$

с константой C_ε, не зависящей от $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Такое продолжение существует, согласно предложению 2.2.

Пусть теперь $\theta_1(\eta) := \theta(\eta) - w(\eta)$. Тогда эта функция удовлетворяет следующему неоднородному аналогу уравнения (11.14):

$$a(\partial_\eta^2\theta_1 + \Delta_{y'}\theta_1) - (L - 2a\Lambda_0)\partial_\eta\theta_1 - \left(L\Lambda_0 - a\Lambda_0^2 - l(\eta)\right)\theta_1 -$$
$$- \lambda_0\theta_1 = \partial_{y_1}\theta_1 + h(\eta), \qquad (11.23)$$

где $\theta_1\big|_{\eta=0} = 0$, а функция $h(\eta) := h(t,x)$ равна нулю тождественно при $x_1 > 2$ (благодаря (11.21)) и, согласно (11.22) и (11.13), удовлетворяет оценке

$$\|h\|_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}\times\Omega)} + \|\partial_t h\|_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C'_\varepsilon \|u_1(0) - u_2(0)\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}}, \qquad (11.24)$$

где константа C'_ε зависит от $\|u_i(0)\|_{\Psi_b}$ и ε, но не зависит от $y_0 := (T, x'_0) \in \mathbb{R}^n$.

Умножая теперь уравнение (11.23) а $e^{-\varepsilon|\eta-\eta_0|-\varepsilon|y-y_0|}\theta_1$ и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 11.1, мы получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка:

$$\left\langle |\partial_\eta\theta_1|^2 + |\nabla_{y'}\theta_1|^2 + |\theta_1|^2, e^{-\varepsilon|\eta-\eta_0|-\varepsilon|y-y_0|}\right\rangle \le$$
$$\le C'' \left\langle |h|^2, e^{-\varepsilon|\eta-\eta_0|-\varepsilon|y-y_0|}\right\rangle \qquad (11.25)$$

с константой C'', не зависящей от η_0 и y_0. Из оценок (11.24) и (11.25) следует, что

$$\|\theta_1\|_{W^{(0,1),q}_{\psi_\varepsilon}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le Ce^{-\varepsilon\eta}\|u_1(0) - u_2(0)\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}}, \qquad (11.26)$$

где $\psi_\varepsilon(\eta, y) := e^{-\varepsilon|\eta-\eta_0|-\varepsilon|y-y_0|}$ и константа C не зависит от η_0 и y_0. Возвращаясь в оценке (11.26) к переменной θ, получим

$$\|\theta\|_{W^{(0,1),q}_{\psi_\varepsilon}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C_1 e^{-\varepsilon\eta}\|w^0\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}}. \qquad (11.27)$$

Для завершения доказательства теоремы 11.2 остается воспользоваться свойством регулярности решений параболических уравнений. Для этого мы перепишем уравнение на функцию $\theta(\eta, y) = \theta(t,x)$ в виде

$$\partial_t\theta - a\Delta_x\theta + \lambda_0\theta = h(t,x) :=$$
$$= (L\Lambda_0 - a\Lambda_0^2 - l(t,x))\theta - (L - 2a\Lambda_0)\partial_{x_1}\theta,\ \theta\big|_{\mathbb{R}\times\partial\Omega} = w^0. \qquad (11.28)$$

Применив оценку (2.23) к уравнению (11.28) и воспользовавшись оценкой (11.27) и интерполяционным неравенством для оценки функции h, получим

$$\|\theta\|_{W^{(1,2),q}_{\psi_\varepsilon}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C\left(\|w^0\|_{\Psi_{\psi_\varepsilon}} + \|\theta\|_{W^{(0,1),q}_{\psi_\varepsilon}(\mathbb{R}\times\Omega)}\right) \le$$
$$\le C\|w^0\|_{\Psi_{\psi_\varepsilon}} + 1/2\|\theta\|_{W^{(0,1),q}_{\psi_\varepsilon}(\mathbb{R}\times\Omega)} + C_1\|\theta\|_{W^{(0,1),2}_{\psi_{2\varepsilon/q}}(\mathbb{R}\times\Omega)}.$$

Подставив оценку (11.27) в правую часть полученного неравенства, мы получим следующую оценку:

$$\|\theta\|_{W^{(1,2),q}_{\psi_\varepsilon}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C_2 e^{-\varepsilon\eta}\|w^0\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)}. \tag{11.29}$$

Для получения оценки на $\partial_t\theta$ мы продифференцируем уравнение (11.28) по t и применим оценку (2.23) к полученному уравнению. Используя уже полученную оценку (11.29) для оценивания $\partial_t h$ и рассуждая аналогично выводу формулы (11.29), доказывается оценка

$$\|\partial_t\theta\|_{W^{(1,2),q}_{\psi_\varepsilon}(\mathbb{R}\times\Omega)} \le C_3 e^{-\varepsilon\eta}\|w^0\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)}. \tag{11.30}$$

Из оценок (11.29) и (11.30) следует теперь, что

$$\|\theta\big|_{x_1=\eta}\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)} \le C\|w^0\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)} \tag{11.31}$$

с константой C, не зависящей от $y_0\in\mathbb{R}^n$. Возвращаясь в неравенстве (11.31) от переменой θ к исходной переменной $u_1(\eta)-u_2(\eta)=e^{\Lambda_0\eta}\theta$, получаем оценку (11.20). Теорема 11.2 доказана.

Наша следующая задача – показать, что полугруппа $\{\mathcal{S}_\eta,\eta>0\}$ является непрерывно дифференцируемой по отношению к начальным данным u^0. Для этого нам понадобится следующее предложение, гарантирующее разрешимость уравнения в вариациях, соответствующего задаче (11.5).

Предложение 11.1. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1 и пусть $u(\eta):=\mathcal{S}_\eta u^0$, $u^0\in\Psi_b$, – некоторое решение задачи (6.5). Предположим также, что функция $h(\eta,y)$ удовлетворяет условию*

$$e^{-\Lambda_0\eta}h(\eta,y),e^{-\Lambda_0\eta}\partial_{y_1}h(\eta,y)\in L^q_b(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n). \tag{11.32}$$

Тогда, для любого $v^0\in\Psi_b$ задача

$$\begin{cases} a(\partial^2_\eta w+\Delta_{y'}w)-L\partial_\eta w-\lambda_0 w-f'(u(\eta))w=\partial_{y_1}w+h,\\ w\big|_{\eta=0}=w^0\end{cases} \tag{11.33}$$

имеет единственное решение w в классе

$$w\in L^\infty_{e^{-\Lambda_0\eta}}(\mathbb{R}_+,\Psi_b(\mathbb{R}^n)). \tag{11.34}$$

Более того, для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного $y_0 \in \mathbb{R}^n$ справедлива следующая оценка:

$$\|w(\eta)\|^q_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}} \le Ce^{q(\Lambda_0-\varepsilon)\eta}\|w^0\|^q_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}} + \\ + Ce^{q\Lambda_0\eta}\int_0^\infty e^{-q\varepsilon|\eta-\eta_0|-q\Lambda_0\eta_0}\left(\|h(\eta_0)\|^q_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}} + \|\partial_{y_1}h(\eta_0)\|^q_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}}\right)d\eta_0, \tag{11.35}$$

в которой константа C зависит от $\|u^0\|_{\Psi_b}$, но не зависит от y_0.

Доказательство этого предложения почти дословно повторяет доказательство теоремы 11.2 и поэтому здесь не приводится.

Замечание 11.1. Существенно, что мы рассматриваем задачу (11.33) в классе решений, растущих при $\eta \to +\infty$ не быстрее чем $e^{\Lambda_0\eta}$. Это условие играет роль второго краевого условия на бесконечности для параболической задачи (11.33) и обеспечивает ее однозначную разрешимость.

Теорема 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1, и пусть $u(\eta)$ и $u_1(\eta)$ – произвольные два решения задачи (11.5). Определим функцию $w(\eta)$ как единственное (в классе (11.34)) решение задачи (11.33) с правой частью $h \equiv 0$ и начальным условием $w(0) = u(0) - u_1(0)$. Тогда, для достаточно малых $\varepsilon, \mu > 0$ и произвольного $y_0 \in \mathbb{R}^n$, справедлива оценка*

$$\|u(\eta) - u_1(\eta) - w(\eta)\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}} \le \\ \le Ce^{\Lambda_0\eta}\|u(0) - u_1(0)\|^\mu_{\Psi_b}\|u(0) - u_1(0)\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,x_0}}, \tag{11.36}$$

в которой константа C зависит от $\|u(0)\|_{\Psi_b}$ и $\|u_1(0)\|_{\Psi_b}$, но не зависит от $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Определим функции $v(\eta) := u(\eta) - u_1(\eta)$ и $\theta(t) := v(t) - w(t)$. Тогда последняя функция, очевидно, удовлетворяет уравнению:

$$\begin{cases} a(\partial^2_\eta\theta + \Delta_{y'}\theta) - L\partial_\eta\theta - \lambda_0\theta - f'(u(\eta))\theta = \partial_{y_1}\theta + h(\eta), \\ \theta\big|_{\eta=0} = 0, \end{cases} \tag{11.37}$$

где

$$h(\eta) := \int_0^1 [f'(u(\eta) - sv(\eta)) - f'(u(\eta))]\,ds\ v(\eta). \tag{11.38}$$

Применив оценку (11.35) к уравнению (11.37), получим

$$\|\theta(\eta)\|^q_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}} \leq \\ Ce^{q\Lambda_0\eta}\int_0^\infty e^{-q\varepsilon|\eta-\eta_0|-q\Lambda_0\eta_0}(\|h(\eta)\|^q_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_{y_1}h(\eta)\|^q_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)})\,d\eta_0 \tag{1.39}$$

Таким образом, остается оценить функцию (11.38) и ее первую производную по y_1. Для этого мы воспользуемся тем, что $f' \in C^2$, поэтому

$$|f'(\xi_1) - f'(\xi_2)| \leq Q_\mu(|\xi_1| + |\xi_2|)|\xi_1 - \xi_2|^\mu \tag{11.40}$$

для любого $\xi_i \in \mathbb{R}^k$ и любого $0 \leq \mu \leq 1$ (для некоторой монотонной функции Q_μ, зависящей от μ и f). Таким образом, благодаря вложению $\Psi_b \subset C$ и следствию 11.1,

$$\|h(\eta)\|_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|v(\eta)\|^\mu_{\Psi_b}\|v(\eta)\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}}, \tag{11.41}$$

где C зависит от μ, $\|u(0)\|_{\Psi_b}$ и $\|u_1(0)\|_{\Psi_b}$, но не зависит от y_0. Оценивая правую часть (11.41) при помощью (11.20), получим

$$\|h(\eta)\|_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1e^{(1+\mu)(\Lambda_0-\varepsilon)\eta}\|v(0)\|^\mu_{\Psi_b}\|v(0)\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}}. \tag{11.42}$$

Рассуждая аналогично, но используя аналог оценки (11.40) для функции $f'' \in C^1$ и тот факт, что $\Psi_b \subset C^1_b$, доказывается оценка

$$\|\partial_{y_1}h(\eta)\|_{L^q_{\phi_\varepsilon,y_0}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2e^{(1+\mu)(\Lambda_0-\varepsilon)\eta}\|v(0)\|^\mu_{\Psi_b}\|v(0)\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}}. \tag{11.43}$$

Зафиксировав теперь $\mu > 0$ таким образом, чтобы $(1+\mu)(\Lambda_0 - \varepsilon) \leq \Lambda_0$ и подставив оценки (11.42) и (11.43) в правую часть (11.39), после несложных оценок получим неравенство (11.36). Теорема 11.3 доказана.

Следствие 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1. Тогда полугруппа* (11.18) *дифференцируема по Фреше в пространстве* Ψ_b *для любого* $\eta \geq 0$, *и ее производная Фреше определяется формулой*

$$D_{u^0}\mathcal{S}_\eta(u^0)\xi := w_\xi(\eta),$$

где $\xi \in \Psi_b$, *а* $w_\xi(\eta)$ *– единственное решение задачи* (11.33) *с* $h \equiv 0$ *и* $w(0) = \xi$. *Более того,*

$$\mathcal{S}_\eta \in C^{1+\mu}(\Psi_b, \Psi_b), \tag{11.44}$$

и для любых $u_1^0, u_2^0 \in \Psi_b$ *справедливы оценки:*

$$\|\mathcal{S}_\eta(u_1^0) - \mathcal{S}_\eta(u_2^0) - D_{u^0}\mathcal{S}_\eta(u_1^0)(u_1^0 - u_2^0)\|_{\Psi_b} \leq Ce^{\Lambda_0\eta}\|u_1^0 - u_2^0\|^{1+\mu}_{\Psi_b} \tag{11.45}$$

$$\|D_{u_0}\mathcal{S}_\eta(u_1^0) - D_{u_0}\mathcal{S}_\eta(u_2^0)\|_{\mathcal{L}(\Psi_b,\Psi_b)} \leq Ce^{\Lambda_0\eta}\|u_1^0 - u_2^0\|^{\mu}_{\Psi_b}, \tag{11.46}$$

где $\mu > 0$, *а константа* C *зависит от* $\|u_i^0\|_{\Psi_b}$, $i = 1, 2$.

Действительно, взяв верхнюю грань по $y_0 \in \mathbb{R}^n$ от обеих частей неравенства (11.36) и использовав (1.21), получим оценку (11.45). Оценка (11.46) является стандартным следствием оценки (11.45).

Замечание 11.2. В отличие от полугрупп, порождаемых эволюционными уравнениями, мы не можем гарантировать, что $\mathcal{S}_\eta \in C^2$, даже если $f \in C^\infty$. В действительности для получения гладкости C^N нужно дополнительно требовать, чтобы условие (11.6) выполнялось не только для $\Lambda = \Lambda_0$, но и для $\Lambda = 2\Lambda_0, \cdots, \Lambda = N\Lambda_0$.

В завершение этого параграфа мы докажем, что построенная вспомогательная динамическая система обладает аттрактором $\mathcal{A}^{sp}$, в некотором смысле, совпадающим с аттрактором $\mathcal{A}$ уравнения (3.1).

Теорема 11.4. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1. Тогда полугруппа* $\{\mathcal{S}_\eta, \eta > 0\}$, *определенная по формуле* (11.18), *обладает локально-компактным аттрактором* $\mathcal{A}_{sp}$ *в пространстве* Ψ_b *(см. определение 5.1), который описывается следующим образом:*

$$\mathcal{A}_{sp} = \mathcal{K}\big|_{x_1=0}, \tag{11.47}$$

где множество $\mathcal{K}$ такое же, *как и в теореме 5.1.*

Доказательство. Действительно, согласно абстрактной теореме о существовании аттрактора (см. [3], [62], или [76]), достаточно проверить выполнение следующих условий:

1. Полугруппа (11.18) обладает в Ψ_b ограниченным поглощающим множеством B, которое является компактным в Ψ_{loc}.

2. Сужение оператора S_η на B является непрерывным в топологии пространства Ψ_{loc} при любом $\eta \geq 0$.

Проверим выполнение первого условия. Действительно, из оценки (11.19) следует, что

$$B_R := \{u^0 : \|u^0\|_{\Psi_b} \leq R\} \tag{11.48}$$

является поглощающим множеством для полугруппы (11.18), если R достаточно большое. Очевидно, что это множество не компактно в Ψ_{loc}. Мы утверждаем, однако, что множество $B := \mathcal{S}_1 B_R$ является предкомпактным в Ψ_{loc} поглощающим множеством.

Для доказательства мы введем срезающую функцию $\varphi(x_1) \in C^\infty(\mathbb{R})$, такую что $\phi(0) = 0$ и $\phi(x_1) \equiv 1$ при $x_1 \geq 1$ и рассмотрим новую функцию $w(\eta) := \phi(\eta)u(\eta)$, где $u(\eta) := S_\eta u^0$, $u^0 \in B_R$. Тогда эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w - a\Delta_x w + \lambda_0 w = h(t), \quad w\big|_{x_1=0} = 0, \tag{11.49}$$

где

$$h(t) := -\phi(x_1)f(u) - L\phi(x_1)\partial_{x_1}u - a\partial_{x_1}^2\phi u - 2a\partial_{x_1}\phi\partial_{x_1}u. \tag{11.50}$$

Из оценки (11.10) и теоремы вложения ($q > n+1$) следует, что

$$\|h\|_{C_b^1(\mathbb{R}\times\Omega)} \leq C = C(R),$$

если $u(0) \in B_R$. Поэтому из оценки (2.23) с $p = 2q$ получаем

$$\|w\|_{W_b^{(1,2),2q}(\mathbb{R}\times\Omega)} + \|\partial_t w\|_{W_b^{(1,2),2q}(\mathbb{R}\times\Omega)} \leq C(R). \tag{11.51}$$

И, таким образом,

$$\|S_1u^0\|_{W_b^{(1-1/(4q),2-1/(2q)),2q}(\mathbb{R}\times\Omega)} + \\ + \|\partial_t(S_1u^0)\|_{W_b^{(1-1/(4q),2-1/(2q)),2q}(\mathbb{R}\times\Omega)} \leq C_1.$$

Остается заметить, что пространство $W_b^{(1-1/(4q),2-1/(2q)),2q}(\mathbb{R}\times\Omega)$ компактно вложено в $W_{loc}^{(1-1/(2q),2-1/q),q}(\mathbb{R}\times\Omega)$. Итак, множество $B = S_1 B_R$ действительно является поглощающим множеством для полугруппы S_η, предкомпактным в Ψ_{loc}, и первое условие теоремы о существовании аттрактора проверено.

Справедливость второго условия этой теоремы немедленно следует из оценки (11.20) и леммы 5.1. Таким образом, полугруппа (11.18) действительно обладает локально-компактным аттрактором $\mathcal{A}_{sp}$ в Ψ_b. Формула (11.47) также следует из стандартного описания аттрактора и того очевидного факта, что множества полных ограниченных траекторий полугрупп (11.18) и (2.41) совпадают. Теорема 11.4 доказана.

Замечание 11.3. Согласно теоремам 5.1 и 11.4 аттракторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{sp}$ связаны соотношением

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}\big|_{t=0}, \quad \mathcal{A}^{sp} = \mathcal{K}\big|_{x_1=0}, \tag{11.52}$$

где $\mathcal{K}$ – множество ограниченных решений уравнения (3.1), определенных при всех $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Это соотношение и является ключом к применению вспомогательной полугруппы S_η к исследованию пространственно-временной динамики на аттракторе $\mathcal{A}$.

§*12 Вспомогательная динамическая система в окрестности неподвижной точки.*

В этом параграфе мы построим бесконечномерное неустойчивое многообразие нулевого положения равновесия вспомогательной динамической системы $\{\mathcal{S}_\eta, \eta \ge 0\}$, построенной в предыдущем параграфе. Как и в параграфе 8, мы будем предполагать, что нулевое положение равновесия этой системы является экспоненциально неустойчивым. Напомним, что, согласно следствию 11.3, полугруппа $\{S_\eta, \eta \ge 0\}$ принадлежит классу $C^{1+\mu}(\Psi_b, \Psi_b)$, и ее производная Фреше в $u^0 \equiv 0$

$$\mathcal{S}_\eta^0 := D_{u^0}\mathcal{S}_\eta(0) \tag{12.1}$$

вычисляется по следующей формуле: $\mathcal{S}_\eta^0 v^0 := w(\eta)$, где функция $w(\eta)$ – единственное (согласно предложению 11.1) решение следующей задачи:

$$\begin{cases} a(\partial_\eta w + \Delta_{y'} w) - L\partial_\eta w - \lambda_0 w - f'(0)w = \partial_{y_1} w, \\ w\big|_{\eta=0} = v^0, \end{cases} \tag{12.2}$$

принадлежащее пространству (11.34). Более того, оценка (11.35) позволяет продолжить по непрерывности эту полугруппу, до непрерывной полугруппы, действующей в весовых пространствах Ψ_ϕ с произвольной весовой функцией ϕ достаточно малого экспоненциального роста, в частности, для любой ϕ степенного роста.

Следующее предложение дает явное описание спектра линеаризованной полугруппы (12.1).

Предложение 12.1. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1. Тогда спектр оператора $\mathcal{S}_\eta^0$, $\eta > 0$ в пространстве Ψ_ϕ не зависит от выбора весовой функции ϕ* степенного *роста, совпадает с ее спектром в пространствах $\Psi_{b,\phi}$, и вычисляется по следующей формуле:*

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{S}_\eta^0) = \{0\} \cup \{\lambda = e^{\beta\eta}\ :\ \exists\beta \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\beta \le \varLambda_0,\ \exists\xi \in \mathbb{R}^n,\\ \textit{такое что}\quad \det\big(a(\beta^2 - |\xi'|^2) - L\beta - \lambda_0 - f'(0) - i\xi_1\big) = 0\}.\end{aligned} \tag{12.3}$$

Доказательство. Утверждение предложения является более или менее стандартным. Поэтому мы дадим ниже лишь схему его доказательства.

Докажем сначала независимость спектра от выбора весовой функции. Действительно, пусть $\lambda_0 \notin \sigma(\mathcal{S}_\eta^0)$ в пространстве Ψ (с весовой функцией ϕ, тождественно равной единице) для некоторого $\eta \ge 0$. По определению это означает, что уравнение

$$\mathcal{S}_\eta^0 v - \lambda v = h, \tag{12.4}$$

однозначно разрешимо для любого $h \in \Psi$, и справедлива оценка

$$\|v\|_\Psi \le C\|h\|_\Psi. \tag{12.5}$$

Покажем, что уравнение (12.4) однозначно разрешимо и для любой $h \in \Psi_\phi$ (или $h \in \Psi_{b,\phi}$). Для этого мы введем семейство весовых функций $\widetilde{\phi}_{\varepsilon,y_0}(y) := e^{-\varepsilon(1+|y|^2)^{1/2}}$, $\varepsilon > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и сделаем в уравнении (12.4) замену переменной $\widetilde{v} = \phi_{\varepsilon,y_0}(y)v$. Получим,

$$\mathcal{S}_\eta^0(\varepsilon)\widetilde{v} + \lambda\widetilde{v} = \widetilde{\phi}_{\varepsilon,y_0}h, \tag{12.6}$$

где функция $\mathcal{S}_\eta^0(\varepsilon) := w_\varepsilon(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}a(\partial_\eta w_\varepsilon + \varDelta_{y'} w_\varepsilon) - L\partial_\eta w_\varepsilon - \lambda_0 w_\varepsilon - f'(0)w_\varepsilon =\\ = \partial_{y_1} w_\varepsilon + \varepsilon(L_1(y)w_\varepsilon + L_2(y)\nabla_{y'} w_\varepsilon),\quad w_\varepsilon\big|_{\eta=0} = \widetilde{v},\end{aligned} \tag{12.7}$$

в котором $L_i(y)$ равномерно по ε и y_0 ограниченные функции

$$\|L_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C.$$

(Здесь мы использовали оценки (4.38) на весовые функции $\tilde{\phi}_{\varepsilon,y_0}(y)$). Заметим, что уравнение (12.7) отличается от уравнения (12.2), определяющего оператор $\mathcal{S}^0_\varepsilon$, наличием малого (порядка ε) возмущения в правой части. Поэтому, согласно предложению 11.1 и оценке (11.35), существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что, для всех $\varepsilon < \varepsilon_0$, уравнение (12.7) также имеет единственное (в классе (11.34)) решение $w_\varepsilon(\eta) = \mathcal{S}^0_\eta(\varepsilon)\tilde{v}$. Более того, справедлива оценка

$$\|\mathcal{S}^0_\eta(\varepsilon)\tilde{v} - \mathcal{S}^0_\eta\tilde{v}\|_\Psi \le C\varepsilon e^{\Lambda_0\eta}\|\tilde{v}\|_\Psi \tag{12.8}$$

с константой C, не зависящей от ε и $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Оценка (12.8) показывает, что, при любом фиксированном η, уравнение (12.6) является малым возмущением уравнения (12.4), и, следовательно, из (12.5) следует, что, при достаточно малом ε (зависящем от η), уравнение (12.6) также имеет единственное в Ψ решение, и справедлива оценка

$$\|\tilde{v}\|_\Psi \le C'\|\tilde{\phi}_{\varepsilon,y_0}(y)h\|_\Psi. \tag{12.9}$$

Из оценок (12.9) и (4.38) следует, что построенное единственное решение v удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{\Psi_{\phi_{\varepsilon,y_0}}(\mathbb{R}^n)} \le C''\|h\|_{\Psi_{\phi_{\varepsilon,y_0}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{12.10}$$

в которой $\varepsilon = \varepsilon(\eta)$ – достаточно мало, а константа C'' не зависит от $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Умножив теперь (12.10) на $\phi(y_0)$, проинтегрировав по $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и, воспользовавшись формулой (1.17) мы получим аналог оценки (12.5) для пространства Ψ_ϕ. Вычисляя верхнюю грань вместо взятия интеграла, мы получим аналог этой оценки для пространства $\Psi_{b,\phi}$. Здесь мы неявно воспользовались тем, что любая весовая функция степенного роста является весовой функцией экспоненциального роста μ для любого $\mu > 0$.

Итак, мы доказали, что

$$\sigma_{\Psi_\phi}(\mathcal{S}^0_\eta) \subset \sigma_\Psi(\mathcal{S}^0_\eta),\ \sigma_{\Psi_{b,\phi}}(\mathcal{S}^0_\eta) \subset \sigma_\Psi(\mathcal{S}^0_\eta). \tag{12.11}$$

Обратное вложение доказывается совершенно аналогично. Таким образом, независимость спектра $\mathcal{S}_\eta^0$ от выбора весовой функции ϕ доказана.

Явное выражение (12.3) для спектра оператора $\mathcal{S}_\eta^0$ в невесовом пространстве Ψ (который, как нетрудно показать, совпадает с его спектром в $L^2(\mathbb{R}^n)$) доказывается совершенно стандартным образом, например, при помощи преобразования Фурье по y (см. [7], [30]). Предложение 12.1 доказано.

Наша следующая задача – показать, что нулевое положение равновесия полугруппы $\mathcal{S}_\eta$ заведомо будет экспоненциально неустойчивым, если нулевое положение равновесия полугруппы S_t экспоненциально неустойчиво.

Предложение 12.2. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1 и пусть, дополнительно, справедливо условие* (8.3), *то есть*

$$\sigma\left(a(\partial_\eta^2 + \Delta_{y'}) - L\partial_\eta - \lambda_0 - f'(0)\right) \cap \{\operatorname{Re}\lambda > 0\} \neq \varnothing. \tag{12.12}$$

Тогда линеаризованная полугруппа (12.1) *является экспоненциально неустойчивой:*

$$\sigma(\mathcal{S}_\eta^0) \cap \{|\lambda| > \eta\} \neq \varnothing. \tag{12.13}$$

Доказательство. Действительно, из условия (12.12) следует, что существует точка $\beta_0 \in i\mathbb{R}$, вектор $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, и точка $\lambda_0' \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda_0' > 0$, такая что

$$\det\left(a(\beta_0^2 - |\xi'|^2) - L\beta_0 - \lambda_0 - f'(0) - \lambda_0'\right) = 0. \tag{12.14}$$

С другой стороны, из условия (11.6) немедленно следует, что

$$\operatorname{Re}\sigma\left(a(\Lambda_0^2 - |\xi'|^2) - L\Lambda_0 - \lambda_0 - f'(0)\right) < 0. \tag{12.15}$$

Из условий (12.14) и (12.15) и непрерывной зависимости спектра линейного оператора $a(\Lambda^2 - |\xi'|^2) - L\Lambda - \lambda_0 - f'(0)$ от Λ следует, что найдется точка $\beta \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re}\beta < \Lambda_0$, такая что

$$\operatorname{Re}\sigma\left(a(\beta^2 - |\xi'|^2) - L\beta_0 - \lambda_0 - f'(0)\right) \cap \{i\mathbb{R}\} \neq \varnothing. \tag{12.16}$$

Таким образом, существует $\xi_1 \in \mathbb{R}$, такое что

$$\det\left(a(\beta^2 - |\xi'|^2) - L\beta - \lambda_0 - f'(0) - i\xi_1\right) = 0. \tag{12.17}$$

Формула (12.13) является немедленным следствием формул (12.17) и (12.3). Предложение 12.2 доказано.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной результат этого параграфа, который является аналогом теоремы 8.1 для случая вспомогательной динамической системы $\{\mathcal{S}_\eta, \eta \geq 0\}$.

Теорема 12.1. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1, и пусть, дополнительно, справедливо условие* (12.12). *Тогда для любого* $N >> 1$ *существуют: положительное число* $\sigma > 0$, *вектор* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma < |\xi_0|$, *положительное число* $r_0 = r_0(N) > 0$ *и, перестановочное с группой 'пространственных' сдвигов* $\{T_h^y, h \in \mathbb{R}^n\}$, *отображение*

$$\mathcal{V}_0 : B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}) \to \mathcal{A}_{sp}, \quad T_h^y \circ \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0 \circ T_h^y, \tag{12.18}$$

такое что, для любого $y_0 \in \mathbb{R}^n$, *справедливы оценки:*

$$\begin{cases} \|\mathcal{V}_0(u_1) - \mathcal{V}_0(u_2), B^1_{y_0}\|_\Psi \leq C_N \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{\|u_1-u_2,B^1_y\|_{0,\infty}}{(1+|x-x_0|^{2N})^{1/2}}, \\ \|u_1 - u_2, B^1_{y_0}\|_{0,\infty} \leq C_N \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{\|\mathcal{V}_0(u_1)-\mathcal{V}_0(u_2),B^1_y\|_\Psi}{(1+|y-y_0|^{2N})^{1/2}}, \end{cases} \tag{12.19}$$

в которых константа C_N *зависит только от* N *и не зависит от* y_0.

Более того, существует вектор $\vec{l} \in \mathbb{R}^k$ *и линейный оператор* $\mathbb{S}_0 : \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{C}^n) \to \Psi_b(\mathbb{R}^n)^k$, *такой что*

$$\mathbb{S}_0(u_0).\vec{l} \equiv \operatorname{Re} u_0 \ \text{ для любых } \ u_0 \in \mathbb{B}_{\xi_0,\sigma}(\mathbb{C}^n), \tag{12.20}$$

и, для любого $u_0 \in B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$, *выполнена оценка:*

$$\|\mathcal{V}_0(u_0) - S_0(u_0)\|_{\Psi_b(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_0\|^{1+\mu}_{L_b^\infty(\mathbb{R}^n)}, \tag{12.21}$$

где $1 \geq \mu > 0$ *такое же, как и в* (11.44).

Доказательство. Пусть $L := \mathcal{S}_1$, $L_0 := \mathcal{S}_1^0$, и $P := L - L_0$. Тогда, согласно следствию 11.3,

$$\|Pv^0\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}} \leq C(\|v^0\|_{\Psi_b})\|v^0\|^\mu_{\Psi_b}\|v^0\|_{\Psi_{\phi_\varepsilon,y_0}}, \tag{12.22}$$

где константа C не зависит от y_0.

Согласно описанию (11.47) аттрактора $\mathcal{A}_{sp}$, достаточно построить вложение шара $B(r,0,\mathbb{B}_{\xi_0,\sigma})$ в множество $\mathcal{K}$ полных ограниченных траекторий задачи (11.5), удовлетворяющее условиям теоремы. Как и в случае эволюционной полугруппы S_t, исследованной в параграфе 8, мы будем строить это вложение в подпространство траекторий, экспоненциально стремящихся к нулю при $\eta \to -\infty$. Заметим, однако, что в отличие от эволюционного случая, рассмотренного в параграфе 8, далеко не всякое решение задачи (11.5), определенное при $\eta \le 0$, может быть продолжено до ограниченного решения в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому мы модифицируем схему построения бесконечномерного неустойчивого многообразия, описанную в параграфе 8, перейдя от непрерывного к дискретному 'времени'. Точнее, вместо уравнения (11.5), мы рассмотрим эквивалентное ему разностное уравнение

$$v(m+1) = L_0 v(m) + Pv(m), \quad m \in \mathbb{Z} \tag{12.23}$$

в фазовом пространстве Ψ_b. Тогда, с одной стороны, согласно теореме 11.1, каждое ограниченное решение $v(m)$ уравнения (12.23) порождает полное ограниченное решение $v(\eta) := \mathcal{S}_{\eta-[\eta]}v([\eta])$ задачи (6.5) и наоборот. С другой стороны, по той же теореме, любое ограниченное решение (12.23), определенное при $m \le 0$, однозначно продолжается до полного ограниченного решения задачи (12.23). Поэтому, следуя схеме параграфа 8, мы будем строить вложение шара $B(r,0,\mathbb{B}_{\xi_0,\sigma})$ в пространство последовательностей $\{v(m)\} \in L^\infty(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)$, удовлетворяющих (12.23) при $m < 0$ и стремящихся к нулю при $m \to -\infty$.

Итак, мы собираемся применить теорему о неявной функции для того, чтобы решить уравнение (12.23) в окрестности нулевого положения равновесия. Для этого мы исследуем сначала линейный неоднородный аналог задачи (12.23):

$$w(m+1) - L_0 w(m) = h(m). \tag{12.24}$$

Лемма 12.1. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда для любого $\alpha > 1$, удовлетворящего условию $\alpha > r(L_0) := |\sigma(L_0)|$, и для любой $h \in L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)$ существует единственное решение $w \in L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)$ задачи (12.24), и справедлива оценка:*

$$\|w\|_{L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)} \le C\|h\|_{L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)}. \tag{12.25}$$

Таким образом, формула $(\mathbb{T}_\alpha h)(l) := w(l)$ *корректно определяет линейный оператор*

$$\mathbb{T}_\alpha : L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b) \to L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b).$$

Более того, для любого $N \in \mathbb{N}$ *и любого* $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *справедлива оценка*

$$\|w\|_{L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_{\varphi_{N,y_0}})} \le C_N \|h\|_{L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_{\varphi_{N,y_0}})}, \tag{12.26}$$

в которой $\varphi_{N,y_0}(y)$ *– такая же, как и в* (1.10), *а константа* C_N *не зависит* $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Действительно, оператор $\mathbb{T}_\alpha$ определяется по следующей формуле:

$$(\mathbb{T}_\alpha h)(l) := \sum_{m=-\infty}^{l} L_0^{l-m} h(m). \tag{12.27}$$

Корректность определения (12.27) и оценка (12.25) следуют из предположения, что $\alpha > |\sigma(L_0)|$ и стандартной формулы для спектрального радиуса оператора L_0. Тот факт, что $w := \mathbb{T}_\alpha h$ есть решение (12.24) немедленно следует из определения (12.27). Оценка (12.26) доказывается аналогично (12.25) используя дополнительно, тот факт, что, согласно предложению 12.1, спектральные радиусы оператора L_0 рассматриваемого как оператор в пространстве Ψ_b и в пространстве $\Psi_{\varphi_{N,y_0}}$ совпадают. Лемма 12.1 доказана.

Рассмотрим теперь однородную задачу (12.24) ($h \equiv 0$).

Лемма 12.2. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда существуют: положительное число* α_0, *удовлетворяющее неравенствам* $r(L_0) > \alpha_0 > 1$ *и* $\alpha_0^{1+\mu} > r(L_0)$, *вектор* $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, *число* $\sigma > 0$, $\sigma < |\xi_0|$, *вектор* $\vec{l} \in \mathbb{R}^k$ *и линейный оператор*

$$\mathbb{S} : \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b(\mathbb{R}^n))^k,$$

такой что:

1. $w(m) := (\mathbb{S}u_0)(m)$ *решение* (12.24) *с* $h \equiv 0$ *для любого* $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$.
2. $(\mathbb{S}_0 u_0).\vec{l} \equiv \operatorname{Re} u_0$ *для любого* $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$, где $\mathbb{S}_0 u_0 := (\mathbb{S}u_0)(0)$.

3. Для любых $N \in \mathbb{N}$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$ справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbb{S}u_0\|_{L^\infty_{\alpha_0^- m}(\mathbb{Z}_-,\Psi_{\varphi_{qN,y_0}})} \le C_N \|u_0\|_{L^\infty_{\varphi_{N,y_0}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{12.28}$$

в которой константа C_N не зависит от y_0, и следовательно,

$$\|\mathbb{S}u_0\|_{L^\infty_{\alpha_0^- m}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)} \le C\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \tag{12.29}$$

Доказательство. Действительно, согласно предложению 12.2, существует вектор $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ и точка $\beta_0 = \beta(\xi_0)$, $0 < \operatorname{Re}\beta_0 < \Lambda_0$, такая что

$$\det\left(a(\beta(\xi_0)^2 - |\xi_0'|^2) - L\beta(\xi_0) - \lambda_0 - f'(0) - i\xi_0^1\right) = 0. \tag{12.30}$$

Заметим, что уравнение (12.30) определяет (многозначную) алгебраическую функцию $\widehat{\beta}(\xi)$. Следовательно, без ограничения общности можно предположить, что точка $(\xi_0, \beta_0(\xi_0))$ не является точкой ветвления этой функции. Более того, можно предположить также, что $\xi_0 \ne 0$ и $(1+\mu)\operatorname{Re}\beta_0 > \ln r(L_0)$, где $r(L_0)$ – спектральный радиус оператора L_0, который, согласно предложению 12.1, вычисляется по следующей формуле:

$$\ln r(L_0) = \max\{\operatorname{Re}\widehat{\beta}(\xi)\ : \xi \in \mathbb{R}^n, \operatorname{Re}\widehat{\beta}(\xi) \le \Lambda_0\}. \tag{12.31}$$

Таким образом, существует окрестность $B^{r'}_{\xi_0}$ точки ξ_0 и гладкие однозначные функции $\beta : B^{r'}_{\xi_0} \to B^{r''}_{\beta_0}$ и $e : B^{r'}_{\xi_0} \to \mathbb{C}^k$, такие что $\beta(\xi_0) = \beta_0$ и

$$\left(a(\beta(\xi)^2 - |\xi'|^2) - L\beta(\xi) - \lambda_0 - f'(0) - i\xi^1\right) e(\xi) = 0 \tag{12.32}$$

для любого $\xi \in B^{r'}_{\xi_0}$.

Более того, рассуждая так же, как и в доказательстве предложения 8.2, мы можем перенормировать собственный вектор $e(\xi)$ так, чтобы

$$e(\xi).\vec{l} = 1 \quad \text{для всех } \xi \in B^{r'}_{\xi_0} \tag{12.33}$$

и некоторого постоянного вектора $\vec{l} \in \mathbb{R}^k$.

Уменьшив радиус $r' > 0$, если необходимо, мы можем предположить также, что $(1+\mu)(\operatorname{Re}\beta_0 - r'') > \ln r(L_0)$. Определим теперь показатель $\alpha_0 := e^{\operatorname{Re}\beta_0 - r''}$ и показатель $\sigma > 0$ таким образом, чтобы

$$\operatorname{supp}\widehat{u}_0 \subset B_{\xi_0}^{r'/2}, \quad \text{для любого} \quad u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{C}^n), \tag{12.34}$$

где через $\widehat{u}_0$ обозначено преобразование Фурье от u_0.

Определим теперь оператор $\mathbb{S}' : \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0} \to L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}))^k$ по формуле

$$\mathbb{S}'\widehat{(u_0)(m)}(\xi) := e^{m\beta(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)e(\xi), \quad u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}. \tag{12.35}$$

Тогда, рассуждая аналогично доказательству предложения 8.2, нетрудно показать, что оператор $\mathbb{S}(u_0) := \operatorname{Re}\mathbb{S}'(u_0)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма 12.2 доказана.

Следующая лемма является аналогом оценки (8.31).

Лемма 12.3. *Пусть выполнены условия теоремы, и пусть оператор $\mathbb{S}_0$ – такой же, как и в лемме 12.2. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$C_N^{-1}\|u_0\|_{L^\infty_{\varphi_{N,y_0}}(\mathbb{R}^n)} \le \|\mathbb{S}_0 u_0\|_{L^\infty_{\varphi_{N,y_0}}(\mathbb{R}^n)} \le C_N\|u_0\|_{L^\infty_{\varphi_{N,y_0}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{12.36}$$

в которой константа C_N не зависит от y_0.

Действительно, правая часть оценки (12.36) следует из оценки (12.28), а ее левая часть – из равенства $\mathbb{S}_0 u_0 = \operatorname{Re} u_0$ и предложения 8.3

Следующая лемма описывает некоторые аналитические свойства оператора P, рассматриваемого как оператор на пространстве последовательностей.

Лемма 12.4. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда оператор $\mathcal{P}$, определенный по формуле*

$$(\mathcal{P}v)(m) := Pv(m), \tag{7.29}$$

принадлежит пространству

$$\mathcal{P} \in C^{1+\mu}(L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b), L^\infty_{\alpha^{-m(1+\mu)}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b)) \tag{12.38}$$

для любого $\alpha > 1$. Более того, для любых N и y_0 справедлива оценка:

$$\|\mathcal{P}v\|_{L^\infty_{\alpha^{-m(1+\mu)}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_{\varphi_{N,y_0}})} \le \\ \le C_N\|v\|^{\mu}_{L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)} \cdot \|v\|_{L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_{\varphi_{N,y_0}})}, \quad (12.39)$$

в которой константа C_N не зависит от $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Действительно, оценка (12.39) является элементарным следствием оценок (12.22) и (1.17). Проверим теперь дифференцируемость этого оператора. Пусть $v_1, v_2 \in L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b)$. Тогда, согласно следствию 11.3,

$$\|P(v_1(m)) - P(v_2(m)) - D_{u_0}P(v_1(m))(v_1(m) - v_2(m))\|_{\Psi_b} = \\ \|L(v_1(m)) - L(v_2(m)) - D_{u_0}L(v_1(m))(v_1(m) - v_2(m))\|_{\Psi_b} \le \\ \le C\|v_1(m) - v_2(m)\|^{1+\mu}_{\Psi_b}. \quad (12.40)$$

Умножив (8.40) на $\alpha^{-(1+\mu)m}$ и взяв верхнюю грань по $m \in \mathbb{Z}_-$, мы получим дифференцируемость по Фреше отображения $\mathcal{P}$ (и проверим очевидную формулу для его производной). Осталось показать, что эта производная непрерывна по Гельдеру. Пусть, дополнительно, $\xi \in L^\infty_{\alpha^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b)$ – произвольная последовательность. Тогда, из (11.46) следует оценка

$$\|[D_{u_0}P(v_1(m)) - D_{u_0}P(v_2(m))]\xi(m)\|_{\Psi_b} = \\ = \|[D_{u_0}L(v_1(m)) - D_{u_0}L(v_2(m))]\xi(m)\|_{\Psi_b} \le C\|v_1 - v_2\|^{\mu}_{\Psi_b}\|\xi(m)\|_{\Psi_b}. \quad (12.41)$$

Умножив эту оценку на $\alpha^{-(1+\mu)m}$ и вычислив верхнюю грань по $m \in \mathbb{Z}_-$, мы убеждаемся, что производная $\mathcal{P}$ действительно является непрерывной по Гельдеру. Лемма 12.4 доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы. Для этого мы перепишем уравнение (12.23) в следующем виде:

$$v = \mathbb{S}u_0 + \mathbb{T}_{\alpha_0^{1+\mu}}\mathcal{P}v, \quad (12.42)$$

где показатель $\alpha_0 > 1$ такой же, как и в лемме 12.2, $u_0 \in \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}$ и $v \in L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b)$, и разрешим его в окрестности нулевого решения при помощи теоремы о неявной функции. Действительно, определим функцию

$$\mathcal{F} : L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b) \times \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b) \tag{12.43}$$

по формуле

$$\mathcal{F}(v, u_0) := v - \mathbb{S}u_0 - \mathbb{T}_{\alpha_0^{1+\mu}}\mathcal{P}v. \tag{12.44}$$

Заметим, что по построению $\alpha_0^{1+\mu} > r(L_0)$, и, следовательно, (благодаря леммам 12.1 и 12.4), функция (12.44) определена корректно. Более того, из леммы 12.4 следует, что эта функция принадлежит классу $C^{1+\mu}$ и $D_v\mathcal{F}(0,0) = \mathrm{Id}$. Поэтому, по теореме о неявной функции существуют $r_0 > 0$ и C^1-отображение $\mathcal{V} : B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}) \to L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-, \Psi_b)$, такое что

$$\mathcal{F}(\mathcal{V}(u_0), u_0) = 0, \tag{12.45}$$

и, следовательно, функция $v := \mathcal{V}(u_0)$ является решением уравнения (12.23). Определим теперь $\mathcal{V}_0(u_0) := \mathcal{V}(u_0)(0)$. Мы утверждаем, что это отображение удовлетворяет всем условиям теоремы. Действительно, так как $D_{u_0}\mathcal{V}(0) = 0$, то

$$\|\mathcal{V}(u_0)\|_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)} \le C\|u_0\|_{L^\infty} \le Cr_0. \tag{12.46}$$

Из оценок (12.39), (12.45) и (12.46) следует теперь, что

$$\|\mathcal{V}(u_0) - \mathbb{S}u_0\|_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)} \le C\|u_0\|^{1+\mu}_{L^\infty}. \tag{12.47}$$

Ограничив (12.47) на $m = 0$, мы получим (12.21). Проверим теперь оценки (12.19). Пусть $u_1, u_2 \in B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$. Тогда из оценок (12.45), (12.25) и (11.45) следует, что

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{V}(u_1) - \mathcal{V}(u_2) - \mathbb{S}(u_1 - u_2)\|_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_{\varphi_{N,y_0}})} \le \\ &\le C_N \sum_{i=1}^{2} \|\mathcal{V}(u_i)\|^\mu_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)} \|\mathcal{V}(u_1) - \mathcal{V}(u_2)\|_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_{\varphi_{N,y_0}})}.\end{aligned} \tag{12.48}$$

Использовав теперь оценки (12.46), (12.28) и уменьшив радиус $r_0 > 0$, если это необходимо, мы выведем из (12.48) следующую оценку:

$$\|\mathcal{V}(u_1) - \mathcal{V}(u_2)\|_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_{\varphi_{qN,y_0}})} \le C_N \|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\varphi_{N,y_0}}}, \tag{12.49}$$

справедливую для любых $u_1, u_2 \in B(r_0(N), 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ при достаточно малом положительном $r_0(N) > 0$. Первая оценка (12.21) является немедленным следствием этой оценки. (с заменой N на $N-n-1$). Проверим теперь вторую оценку (12.21). Действительно, из (12.48) и (12.36) следует:

$$C_N^{-1}\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\varphi_{N,x_0}}} \le \|\mathcal{V}_0(u_1) - \mathcal{V}_0(u_2)\|_{L^\infty_{\varphi_{N,x_0}}} + \\ + C_N' \sum_{i=1}^{2} \|\mathcal{V}(u_i)\|^\mu_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_b)} \|\mathcal{V}(u_1) - \mathcal{V}(u_2)\|_{L^\infty_{\alpha_0^{-m}}(\mathbb{Z}_-,\Psi_{\varphi_{N,y_0}})}. \tag{12.50}$$

Подставив оценки (12.46) и (12.49) в правую часть неравенства (12.50), получим

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\varphi_{N,x_0}}} \le C\|\mathcal{V}_0(u_1) - \mathcal{V}_0(u_2)\|_{L^\infty_{\varphi_{N,x_0}}} + \\ + C_N'' r_0^\mu \|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\varphi_{N,x_0}}}. \tag{12.51}$$

Выбрав $r_0 = r_0(N)$ достаточно малым, мы получим из (12.51), что для любых $u_1, u_2 \in B(r_0(N), 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ справедлива оценка

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\varphi_{N,x_0}}} \le C_1\|\mathcal{V}_0(u_1) - \mathcal{V}_0(u_2)\|_{L^\infty_{\varphi_{N,x_0}}}. \tag{12.52}$$

Таким образом, вторая оценка (12.21) также доказана.

Заметим, что, как и в теореме 8.1, перестановочность оператора $\mathcal{V}_0$ с группой 'пространственных' сдвигов следует из того, что все операторы, входящие в уравнение (12.42), перестановочны с этой группой и из того, что его решение, построенное по теореме о неявной функции, является единственным.

Таким образом, остается проверить вложение (12.18). Действительно, пусть $u_0 \in B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$. Тогда функция

$$v(m) := \begin{cases} \mathcal{V}(u_0)(m) & \text{при} \quad m \in \mathbb{Z}_-, \\ L^m(u_0) & \text{при} \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

является полной ограниченной траекторией уравнения (12.23). Более того, из теоремы 11.1 следует, что функция $v(\eta) := \mathcal{S}_{\eta-[\eta]}v([\eta])$ является полной ограниченной траекторией полугруппы S_t. Таким образом, $v \in \mathcal{K}$ и, согласно описанию (11.47), $v(0) = \mathcal{V}(u_0) \in \mathcal{A}_{sp}$. Теорема 12.1 доказана.

Сформулируем теперь ряд очевидных следствий доказанной теоремы.

Следствие 12.1. *Пусть выполнены условия теоремы 12.1. Тогда для любого $N \gg 1$ существуют $r_0 = r_0(N)$ и гомеоморфное вложение*

$$\widetilde{\mathcal{V}}:\ (T_h^y, B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})) \to (T_h^y, \mathcal{K}), \tag{12.53}$$

такое что

$$\begin{aligned} &C_N^{-1}\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\varphi_{N,y_0}}} \le \\ &\qquad \le \|\widetilde{\mathcal{V}}(u_1) - \widetilde{\mathcal{V}}(u_2)\|_{L^\infty_{e^{-\Lambda_0|\eta|}}(\mathbb{R}, \Phi_{\varphi_{qN,y_0}})} \le C_N\|u_1 - u_2\|_{L^\infty_{\varphi_{N,y_0}}} \end{aligned} \tag{12.54}$$

для некоторой константы C_N, не зависящей от y_0.

Действительно, искомое вложение определяется формулой:

$$\widetilde{\mathcal{V}}(u_0)(\eta) := \begin{cases} \mathcal{S}_{\eta-[\eta]}\mathcal{V}(u_0)([\eta]), & \text{если } \eta < 0, \\ \mathcal{S}_\eta \mathcal{V}_0(u_0), & \text{если } \eta > 0. \end{cases} \tag{12.55}$$

Следствие 12.2. *Пусть выполнены условия теоремы 12.1. Тогда для любого $\varepsilon < \varepsilon_0 < 1$ и любого $R \ge 1$ справедлива следующая оценка:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}_{sp}, L^\infty(y \in B_0^R)\right) \ge CR^n \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{12.56}$$

в которой C не зависит от R и ε. Более того, в случае $R = 1$ справедлива оценка

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}_{sp}, L^\infty(B_0^1)\right) \ge C\left(\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{(\ln\ln\frac{1}{\varepsilon})^n}\right)^{n+1}. \tag{12.57}$$

Действительно, оценки (12.56) и (12.57) выводятся из оценки (12.21) и соответствующих оценок для ε-энтропии в пространстве $\mathbb{B}^{\mathrm{Re}}_{\sigma,\xi_0}$ точно так же, как и в теореме 8.2.

Следствие 12.3. *Пусть выполнены условия теоремы 12.1. Тогда модифицированная топологическая энтропия группы 'пространственных' сдвигов T_h^y на аттракторе $\mathcal{A}_{sp}$ строго положительна:*

$$\widehat{h}_{'sp'}(\mathcal{A}_{sp}) > 0. \tag{12.58}$$

Действительно, (12.58) является немедленным следствием (12.56).

§13 *Пространственно-временной хаос, порождаемый нелинейным уравнением реакции-диффузии.*

В этом параграфе мы вернемся к изучению пространственно-временной динамики, порождаемой уравнением (3.1) на аттракторе $\mathcal{A}$. Центральную роль при этом будет играть вспомогательная динамическая система, исследованная в параграфах 11 и 12, и, построенное в теореме 12.1, бесконечномерное неустойчивое многообразие для нулевого положения равновесия этой системы. Мы начнем с доказательства того факта, что при выполнении весьма общих условий, модифицированная топологическая энтропия эволюционной полугруппы $\{S_t, t \geq 0\}$, соответствующей пространственно-однородному уравнению (3.1), является строго положительной.

Теорема 13.1. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1, уравнение* (3.1) *является пространственно-однородным (то есть, выполнены условия* (11.1)*), вектор L имеет вид* (11.2)*, с константой L, удовлетворяющей условию* (11.6)*, и пусть нулевое положение равновесия уравнения* (3.1) *является экспоненциально неустойчивым (выполнено условие* (8.3)*).*
Тогда модифицированная топологическая энтропия аттрактора $\mathcal{A}$, соответствующая n-мерному подпространству $V_n := \operatorname{span}\{t, x_2, \cdots, x_n\}$ (см. определение 9.2), является конечной и строго положительной:

$$0 < C_1 \leq \widehat{h}_n^{V_n}(\mathcal{A}) \leq C_2 < \infty. \tag{13.1}$$

Доказательство. Действительно, согласно следствию 12.3 и предложению 9.4, имеем

$$\widehat{h}_n^{V_n}(\mathcal{K}) \geq \mathrm{C}'\widehat{h}_{'sp'}(\mathcal{A}_{sp}) \geq C_1 > 0. \tag{13.2}$$

Применяя предложение 9.4 вновь, получим

$$\widehat{h}_n^{V_n}(\mathcal{A}) \geq C''\widehat{h}_n^{V_n}(\mathcal{K}) \geq C''C_1 > 0. \tag{13.3}$$

Оценка сверху была доказана в теореме 9.2. Теорема 13.1 доказана.

Следствие 13.1. *Пусть выполнены условия теоремы 13.1. Тогда модифицированная топологическая энтропия, соответствующая эволюционной полугруппе $\{S_t, t \ge 0\}$, является строго положительной:*

$$\widehat{h}_t(\mathcal{A}) :=$$

$$= \limsup_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-n}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{K}, L^\infty_{e^{-|x|}}([0,T]\times\mathbb{R}^n_x)\right) > 0. \quad (13.4)$$

Действительно, неравенство (13.4) является немедленным следствием оценки (13.1) и теоремы 9.3

Замечание 13.1. Оценка (13.4) показывает, в частности, что классическая топологическая энтропия эволюционной полугруппы S_t (которая определяется аналогично (13.4) *но без* дополнительного множителя $\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-n}$) является бесконечной в условиях теоремы 13.1.

Заметим также, что утверждение следствия 13.1 справедливо не только для постоянного векторного поля L вида (11.2), но и для произвольного постоянного векторного поля $L \in \mathbb{R}^n$, такого что $L = |\vec{L}|$ удовлетворяет условию (11.6).

Наша следующая цель – описать пространственно-временной хаос, возникающий в уравнении (3.1) в условиях теоремы 13.1 при помощи схемы Бернулли $(\mathcal{T}_l, \mathcal{M})$, введенной в определении 10.1. Для этого нам понадобится следующее предложение.

Предложение 13.1. *Пусть выполнены условия теоремы 13.1, и пусть, дополнительно, матрица диффузии уравнения* (3.1) *удовлетворяет условию*

$$aa^* = a^*a. \quad (13.5)$$

Тогда отображение $\Pi_0 : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$, $\Pi_0 u := u(0)$ является гомеоморфизмом

$$\Pi_0 : \mathcal{K} \leftrightarrow \mathcal{A}, \quad (13.6)$$

где множества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ снабжены локальной топологией, индуцированной вложениями в пространства $C_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $C_{loc}(\mathbb{R}^n)$ соответственно.

Доказательство. Действительно, так как $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ компактны и $\Pi_0(\mathcal{K}) = \mathcal{A}$, то достаточно проверить инъективность отображения (13.6). Другими словами, достаточно проверить, что уравнение (3.1) обладает свойством обратной единственности на аттракторе. Но этот факт немедленно следует из теоремы 4.3. Предложение 13.1 доказано.

Следствие 13.2. *Пусть выполнены условия теоремы 13.1 и пусть, дополнительно, справедливо условие (13.5). Тогда существуют $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma, r_0 \in \mathbb{R}_+$ и гомеоморфное вложение*

$$\mathbb{V} : B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0}) \hookrightarrow \mathcal{A}, \tag{13.7}$$

такое что

$$S_t \mathbb{V}(u_0) = \mathbb{V}(T_t^{x_1} u_0), \quad T_h^{x_i} \mathbb{V}(u_0) = \mathbb{V}(T_h^{x_i} u_0)\ ,\ i = 2, \cdots, n \tag{13.8}$$

для любого $u_0 \in B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$, $t \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$ (здесь и далее $T_h^{x_i} := T_{he_i}$ – оператор пространственного сдвига вдоль направления координатного вектора $\vec{e}_i$) Более того,

$$\widehat{h}_n^{V_n}(\mathbb{V}(B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})) > 0.$$

Доказательство. Действительно, согласно следствию 12.1 и неравенству (12.54), существует вложение $\widetilde{\mathcal{V}}$ множества $B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ в $\mathcal{K}$, снабженное топологией $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \Psi_{loc}(\mathbb{R}^n))$. Но как нетрудно проверить, используя оценку (2.23) с $\Omega = \mathbb{R}^n$ и тот факт, что множество $\mathcal{K}$ ограничено в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, топологии, индуцированные на $\mathcal{K}$ вложениями в пространства $C_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $C_{loc}(\mathbb{R}, \Psi_{loc}(\mathbb{R}^n_y))$, совпадают. Следовательно, (12.53) – гомеоморфное вложение шара $B(r_0, 0, \mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})$ в пространство $\mathcal{K}$, наделенное топологией $C_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Определим теперь искомое отображение по формуле:

$$\mathbb{V} := \Pi_0 \circ \widetilde{\mathcal{V}}, \tag{13.9}$$

где Π_0 было введено в предложении 13.1. Очевидно, что построенное отображение удовлетворяет всем условиям следствия. Следствие 13.2 доказано.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 13.2. *Пусть выполнены условия следствия 13.2. Тогда существуют: положительное число $\alpha > 0$ и гомеоморфное вложение*

$$\widehat{\tau} : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{A}, \tag{13.10}$$

такое что

$$S_{\alpha l}\widehat{\tau}(v_0)=\widehat{\tau}(\mathcal{T}_l^{x_1}v_0),\quad T_{\alpha l}^{x_i}\widehat{\tau}(v_0)=\widehat{\tau}(\mathcal{T}_l^{x_i}v_0)\ ,\ i=2,\cdots,n \tag{13.11}$$

для любого $l\in\mathbb{Z}$ *и любого* $v_0\in\mathcal{M}$. *Более того,*

$$\widehat{h}_n^{V_n}(\widehat{\tau}(\mathcal{M}))>0,$$

где $V_n:=\operatorname{span}\{t,x_2,\cdots,x_n\}$.

Доказательство. Действительно, согласно следствию 13.2 достаточно построить гомеоморфное вложение

$$\widetilde{\kappa}:(\mathcal{T}_l,\mathcal{M})\hookrightarrow(T_{\alpha l}^{y},B(r_0,0,\mathbb{B}_{\sigma,\xi_0})).$$

Но такое вложение было, фактически, построено в доказательстве теоремы 8.2. Теорема 13.2 доказана.

Замечание 13.2. Результаты теорем 10.2, 11.1 и 13.2 показывают, что, несмотря на кажущееся принципиальное различие между направлением t и пространственными направлениями в расширенной динамической системе $(\mathbb{S}_{(t,h)},\mathcal{A})$, эти направления являются, в некотором смысле, эквивалентными.

Как и в случае пространственной динамики, исследованном в параграфе 10, вложение (13.10) позволяет построить гомеоморфное вложение произвольной конечномерной динамики в пространственно-временную динамику $\mathbb{S}_{(t,h)}^{V_n},\mathcal{A})$, $V_n:=\operatorname{span}\{t,x_2,\cdots,x_n\}$.

Следствие 13.3. *Пусть выполнены условия теоремы 13.2, пусть* $K\subset\mathbb{R}^N$ *– произвольное компактное подмножество в* $\mathbb{R}^N$, $N\in\mathbb{N}$, *и пусть* $F_1,\cdots,F_n:K\to K$ *– произвольные попарно-коммутирующие гомеоморфизмы:*

$$F_i\circ F_j=F_j\circ F_i,\quad i,j\in\{1,\cdots,n\}. \tag{13.12}$$

Тогда, существует положительное число $\gamma=\gamma(N)>0$ *и гомеоморфизм*

$$\widetilde{\tau}:K\to\widetilde{\tau}(K)\subset\mathcal{A}, \tag{13.13}$$

такие что

$$S_{\gamma l_1}\circ T_{\gamma l_2}^{x_2}\circ\cdots\circ T_{\gamma l_n}^{x_n}\widetilde{\tau}(k)=\widetilde{\tau}\left(F_1^{l_1}\circ\cdots\circ F_n^{l_n}k\right),\quad k\in K,\quad l\in\mathbb{Z}^n, \tag{13.14}$$

где через $F_i^{l_i}$ обозначена l_i-тая итерация отображения F_i.

Доказательство этого следствия совершенно аналогично следствию 10.1 и поэтому здесь не приводится.

Для количественного описания динамической сложности индивидуальных траекторий, лежащих на аттракторе, естественно ввести, аналогично определению 10.2, следующую величину.

Определение 13.1. Пусть $u_0 \in \mathcal{A}$ –произвольная точка аттрактора. Тогда, по определению, модифицированной топологической энтропией точки u_0 называется следующая величина:

$$\widehat{h}_t(u_0) := \widehat{h}_t(\mathcal{H}_t(u_0)), \text{ где } \mathcal{H}_t(u_0) := [S_t u_0, t \in \mathbb{R}]_{L^\infty_{loc}(R^n)}, \tag{13.15}$$

а через $[\cdot]_V$ обозначено в пространстве V.

Следствие 13.4. *Пусть выполнены условия теоремы 13.2. Тогда для любой точки $u_0 \in \mathcal{A}$, соответствующая ей модифицированная топологическая энтропия конечна. Более того, существуют $u_0 \in \mathcal{A}$, (модифицированная) топологическая энтропия которых строго положительна:*

$$0 < \widehat{h}_t(u_0) < \infty. \tag{13.16}$$

Действительно, первое утверждение является немедленным следствием теоремы 9.2, а второе утверждение следует из теоремы 13.2 и очевидной топологической транзитивности модельной динамической системы $\{\mathcal{T}_l^{x_1}, \mathcal{M}\}$, $l \in \mathbb{Z}$.

В заключение этого параграфа мы покажем, что если ограничиться рассмотрением только эволюционной динамики $(S_t, \mathcal{A})$, то условие конечномерности множества K в следствии 13.3 можно убрать.

Следствие 13.5. *Пусть выполнены условия теоремы 13.2, и пусть размерность $n > 1$. Предположим также, что K – произвольный метрический компакт, а $F : K \to K$ – произвольный его гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфное вложение*

$$\widetilde{\tau}_K : K \hookrightarrow \mathcal{A}, \tag{13.17}$$

такое что

$$S_\alpha \circ \widetilde{\tau}_K(k) = \widetilde{\tau}_K(F(k)), \quad k \in K, \tag{13.18}$$

где $\alpha > 0$ – такое же, как и в теореме 13.2.

Доказательство. Согласно теореме 13.2, достаточно построить вложение

$$\tau_K : (F, K) \hookrightarrow (\mathcal{T}_l^{x_1}, \mathcal{M}). \tag{13.19}$$

Напомним, что $\mathcal{M} := \mathbb{D}^{\mathbb{Z}^n} = (\mathbb{D}^{\mathbb{Z}^{n-1}})^{\mathbb{Z}}$, где $\mathbb{D}$ единичный диск в $\mathbb{C}$. Поэтому, если известно произвольное гомеоморфное вложение

$$\tau : K \hookrightarrow \mathbb{D}^{\mathbb{Z}^{n-1}}, \tag{13.20}$$

то искомое вложение (13.19) можно построить по очевидной формуле

$$\tau_K(k)(l) := \tau(F^{(l)}(k)), \quad k \in K, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{13.21}$$

Таким образом, остается построить вложение (13.20). В действительности, мы построим вложение

$$\widehat{\tau} : K \hookrightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}. \tag{13.22}$$

Так как по условию $n > 1$, то из (13.22) очевидно следует существование вложения (13.19).

Так как по условию (K, d) – метрический компакт, то без ограничения общности можно считать, что диаметр K в метрике d не превосходит единицы. Рассмотрим произвольное счетное всюду плотное подмножество $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в пространстве K и определим отображение (13.22) по формуле

$$\tau(k)(n) := d(k, k_n). \tag{13.23}$$

Тогда, как нетрудно проверить, отображение (13.23) является инъективным и непрерывным, а следовательно (так как K – компакт) гомеоморфно отображает K на свой образ $\tau(K) \subset [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Следствие 13.5 доказано.

Замечание 13.3. Предположим, что для некоторого уравнения вида (3.1) в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, выполнены условия следствия 13.5 и что S_t и $\mathcal{A}$ – эволюционная полугруппа, соответствующая этому уравнению и ее аттрактор соответственно. Пусть также задано другое уравнение вида (3.1) в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющее (13.5), и пусть S'_t и $\mathcal{A}'$ – порождаемая им полугруппа и ее аттрактор соответственно. Тогда, так как $S'_t : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'$ является гомеоморфизмом при любом t, согласно предложению 13.1, а сам аттрактор $\mathcal{A}'$, очевидно является метрическим компактом, то по следствию 13.5, существует гомеоморфное вложение

$$\tau : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}, \tag{13.24}$$

такое что

$$S_{\alpha l}\tau(u_0) = \tau(S'_{\alpha l}u_0),\ u_0 \in \mathcal{A}',\quad l \in \mathbb{N}. \tag{13.25}$$

Заметим, что мы не предполагаем выполнения условия $m \le n$.

Данный пример (в некотором смысле) показывает бесперспективность изучения эволюционной динамики $(S_t, \mathcal{A})$ на аттракторе вне ее связи с пространственной динамикой $(T_h, \mathcal{A})$ и, тем самым, оправдывает введение расширенной динамической системы $\mathbb{S}_{(t,h)} := S_t \circ T_h$ и изучение пространственной и временной динамики с единой точки зрения.

§14 *Примеры.*

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров уравнений вида (3.1), иллюстрирующих основные результаты предыдущих параграфов. В качестве первого примера мы продемонстрируем зависимость колмогоровской ε-энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ от физических параметров задачи (3.1) для следующего модельного уравнения:

$$\begin{cases} \partial_t u = \nu a \Delta_x u - \lambda_0 u - f(u), \quad , \quad u = (u^1, \cdots, u^k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{14.1}$$

которое отличается от (3.1) наличием малого положительного параметра $\nu \ll 1$.

Предложение 14.1. *Предположим, что матрица диффузии a имеет положительную симметрическую часть, а нелинейная функция f удовлетворяет условиям* (3.5) *и* (3.6). *Тогда ε-энтропия аттрактора $\mathcal{A}$ задачи* (14.1) *допускает следующую оценку сверху:*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}, L^\infty(B^R_{x_0})\right) \le C\left(R\nu^{-1/2} + \ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}\right)^n \ln_+\frac{R_0}{\varepsilon}, \tag{14.2}$$

в которой константы C *и* R_0 *не зависят от* $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $\varepsilon > 0$, *а также от* $\nu < 1$.

Действительно, заменой переменной $x' := x\nu^{-1/2}$ уравнение (14.1) с произвольным малым параметром ν сводится к случаю $\nu = 1$. Оценка (14.2) следует теперь из неравенства (7.21) и того очевидного факта, что L^∞-норма инвариантна относительно замены $x' = x\nu^{-1/2}$.

Предложение 14.2. *Пусть выполнены условия предложения 14.1, и пусть также* $f(0) = 0$ *и нулевое положение равновесие* $u = 0$ *является экспоненциально неустойчивым, то есть*

$$\sigma\left(a\Delta_x - \lambda_0 - f'(0)\right) \cap \{\operatorname{Re}\lambda > 0\} \neq \varnothing. \tag{14.3}$$

Тогда ε*-энтропия аттрактора* $\mathcal{A}$ *допускает оценку снизу*

$$\mathbb{H}_\varepsilon\left(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}, L^\infty(B^R_{x_0})\right) \geq C_1 R^n \nu^{-n/2} \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{14.4}$$

в которой константа C_1 *не зависит от* $R \geq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $\varepsilon < \varepsilon_0$, *а также от* $\nu < 1$.

Действительно, оценка (14.4) следует из оценки (8.53) и перенормировки $x' = x\nu^{-1/2}$ так же, как и в предложении 14.1.

Следствие 14.1. *Пусть выполнены условия предложения 14.2. Тогда пространственная топологическая энтропия* $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A})$ *аттрактора* $\mathcal{A}$ *уравнения* (14.1) *(которая определяется по формуле* (9.17)*) допускает следующие оценки:*

$$C_1\nu^{-n/2} \leq \widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}) \leq C_2\nu^{-n/2}, \tag{14.5}$$

где константы C_i *не зависят от* $\nu \leq 1$. *Аналогично, величина* $d_{n+1}(\mathcal{A})$, *определенная по формуле* (9.39) *и эквивалентная* 0*-мерной модифицированной топологической энтропии, допускает оценки*

$$C_1'\nu^{-n/2} \leq d_{n+1}(\mathcal{A}) \leq C_2'\nu^{-n/2}, \tag{14.6}$$

где константы C_i' *не зависят от* $\nu \leq 1$.

Действительно, оценки (14.5) и (14.6) являются немедленными следствиями неравенств (14.2) и (14.4).

Замечание 14.1. Как известно (см., например, [3]), фрактальная размерность $d_F(\mathcal{A})$ аттрактора уравнения (14.1) в ограниченной области $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ допускает оценки

$$C_1\nu^{-n/2} \le d_F(\mathcal{A}) \le C_2\nu^{-n/2}, \tag{14.7}$$

где константы C_i не зависят от $\nu < 1$. Оценки (14.5) и (14.6) являются естественным аналогом неравенств (14.7) для случая неограниченной области $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Пример 14.1. Простейшим модельным примером системы уравнений вида (3.1), для которого выполнены условия предложений 14.1 и 14.2, является скалярное уравнение Chafee-Infante в $\Omega = \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u = \nu\Delta_x u + u - u^3, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u\big|_{t=0} = u_0. \tag{14.8}$$

Таким образом, для энтропии аттрактора $\mathcal{A}$ уравнения (14.8) справедливы оценки (14.2)–(14.6).

Пример 14.2. Более нетривиальным примером такого типа является уравнение Гинзбурга-Ландау в $\mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u = \nu(1+i\alpha)\Delta_x u + Ru - (\omega + i\beta)u|u|^{2\sigma}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u\big|_{t=0} = u_0, \tag{14.9}$$

где $u(t,x) = u_1(t,x) + iu_2(t,x)$ – комплекснозначная неизвестная функция, а $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $R > 0$, $\sigma \ge 1$ и $\nu \ll 1$ – заданные параметры. Действительно, переписав комплексное уравнение (14.9) в виде системы двух вещественных уравнений на функции u_1 и u_2, мы получим систему вида (14.1). Более того, как нетрудно проверить, соответствующая нелинейная функция f удовлетворяет условиям (3.5) если (и только если)

$$|\beta| \le \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{\sigma}. \tag{14.10}$$

Для выполнения ограничений (3.6) на рост нелинейности f в случае $n > 4$ необходимо дополнительное условие

$$\sigma < \frac{2}{n-4}. \tag{14.11}$$

Таким образом, при выполнении неравенств (14.10) и (14.11) уравнение Гинзбурга-Ландау (14.9) удовлетворяет всем условиям предложений 14.1 и 14.2, и, следовательно, для энтропии его аттрактора справедливы оценки (14.2)–(14.6).

В качестве следующего приложения мы рассмотрим весьма важный случай градиентной системы уравнений (3.1), то есть предположим дополнительно, что

$$a = a^*, \;\; L \equiv 0, \quad f(u) := \nabla_u F(u), \quad F \in C^4(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}). \tag{14.12}$$

В случае ограниченной области $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ условия (14.12) гарантируют наличие у системы (3.1) глобальной функции Ляпунова вида

$$\mathcal{L}(u_0) := (a\nabla_x u_0, \nabla_x u_0)_\Omega + \\ + \lambda_0 \left(|u_0|^2, 1\right)_\Omega + 2\left(F(u_0), 1\right)_\Omega, \quad u_0 \in \Phi_b. \tag{14.13}$$

Таким образом (см. например, [3]), в случае ограниченной области, решения градиентной системы (3.1) стабилизируются к множеству положений равновесия этой системы, и следовательно, в этом случае уравнение (3.1) порождает тривиальную динамику. В частности, топологическая энтропия полугруппы $S_t : \Phi_b \to \Phi_b$, порожденной системой (3.1) равна нулю:

$$h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = 0 \tag{14.14}$$

(см., например, [63]).

В случае же неограниченной области $\Omega = \mathbb{R}^n$, величина (14.13) оказывается бесконечной для большинства начальных условий $u_0 \in \Phi_b$, поэтому функция (14.13) непригодна для исследования динамики решений уравнения (3.1) при $t \to \infty$. Тем не менее, справедлив следующий аналог формулы (14.14).

Теорема 14.1. *Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$ и пусть выполнены условия* (3.5), (3.6) *и* (14.12). *Тогда топологическая энтропия расширенной полугруппы $\{\mathbb{S}_{(t,h)}, (t,h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\}$, действующей на аттракторе $\mathcal{A}$ уравнения* (3.1), *равна нулю:*

$$\widehat{h}_{top}\left(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}\right) = 0. \tag{14.15}$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ всех борелевских вероятностных мер на $\mathcal{A}$, инвариантных относительно действия группы

$\{T_h, h \in \mathbb{R}^n\}$ пространственных сдвигов на аттракторе. Такие меры существуют, так как $\mathcal{A}$ компактен в локальной топологии. Система уравнений (3.1) порождает полугруппу в пространстве $\mathbb{M}(\mathcal{A})$ по следующей стандартной формуле:

$$S_t^* : \mathbb{M} \to \mathbb{M}, \quad (S_t^* \mu)(B) := \mu\left(S_t^{-1} B\right). \tag{14.16}$$

Вывод формулы (14.15) основан на следующей лемме.

Лемма 14.1. *Пусть выполнены условия теоремы 14.1. Тогда полугруппа* (14.16) *обладает глобальной функцией Ляпунова, которая задается следующей формулой:*

$$\mathcal{L}(\mu) = \\ = \int_{u_0 \in \mathcal{A}} [a \nabla_x u_0(x_0).\nabla_x u_0(x_0) + \lambda_0 u_0(x_0).u_0(x_0) + 2F(u_0(x_0))]\mu(du). \tag{14.17}$$

В частности, $\mathcal{L}(\mu)$ *не зависит от выбора* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *в правой части* (14.17).

Доказательство. Действительно, так как матрица диффузии a является самосопряженной, то из теоремы 4.3 следует что оператор $S_t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является гомеоморфизмом (в локальной топологии $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$) при любом $t \geq 0$. Используя теперь тот факт что оператор S_t является сглаживающим $S_t : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^3_b(\mathbb{R}^n)$ (который доказывается совершенно аналогично теореме 4.2), нетрудно показать, что локальные топологии, задаваемые на аттракторе $\mathcal{A}$ вложениями $\mathcal{A} \subset L^\infty_{loc}(R^n)$ и $\mathcal{A} \subset C^3_{loc}(\mathbb{R}^n)$, совпадают. Поэтому выражение (14.17) имеет смысл. Более того, так как $\mu \in \mathbb{M}(\mathcal{A})$ инвариантна относительно пространственных сдвигов, то выражение (14.17) не зависит от $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Докажем теперь, что (14.17) является функцией Ляпунова.

Пусть $\mu \in \mathbb{M}(\mathcal{A})$. Тогда

$$\mathcal{L}(t) := \mathcal{L}(S_t^* \mu) = \int_{u_0 \in \mathcal{A}} [au(t,x_0).u(t,x_0) + \\ + \lambda_0 u(t,x_0).u(t,x_0) + 2F(u(t,x_0))]\mu(du_0), \tag{14.18}$$

где $u(t,x_0) := (S_t u_0)(x_0)$. Продифференцировав выражение (14.18) по

t и использовав уравнение (3.1), получим

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = -2\int_{u_0\in\mathcal{A}}[\partial_t u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0)+ \\ + 2\sum_{i=1}^{n}\int_{u_0\in\mathcal{A}}\partial_{x_i}[\partial_{x_i} au(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0), \quad (14.19)$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части (14.19) равно нулю. Действительно, так как мера μ инвариантна относительно пространственных сдвигов, то

$$\int_{u_0\in\mathcal{A}}\partial_{x_i}[\partial_{x_i} au(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0) = \\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{u_0\in\mathcal{A}}[a\partial_{x_i} u(t,x_0+he_i).\partial_t u(t,x_0+he_i)- \\ - \partial_{x_i} au(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)]\mu(du_0) = \\ = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_{u_0\in\mathcal{A}}\partial_{x_i} u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)\mu(du_0)- \right. \\ \left. -\int_{u_0\in\mathcal{A}}\partial_{x_i} u(t,x_0).\partial_t u(t,x_0)\mu(du_0)\right\} = 0.$$

Интегрируя (14.19), получаем

$$\mathcal{L}(S^*_{t_2}\mu) - \mathcal{L}(S^*_{t_1}\mu) = -2\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_0\in\mathcal{A}}|\partial_t u(t,x_0)|^2\mu(du_0) \leq 0. \quad (14.20)$$

Таким образом, (14.17) не возрастает вдоль траекторий. Пусть теперь

$$\mathcal{L}(S^*_{t_1}\mu) = \mathcal{L}(S^*_{t_2}\mu) \quad (14.21)$$

для некоторой $\mu \in \mathbb{M}(\mathcal{A})$ и некоторых $t_2 > t_1$. Докажем, что из (14.21) следует, что носитель меры μ является подмножеством множества $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ положений равновесия системы (3.1):

$$\operatorname{supp}\mu \subset \mathcal{R}. \quad (14.22)$$

Действительно, из формулы (14.20) и пространственной инвариантности меры μ следует, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{u_0 \in \mathcal{A}} |\partial_t u(t,x)|^2 \mu(du_0)\, dt = 0 \tag{14.23}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, для μ-почти всякого $u_0 \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} |\partial_t u(t,x)|^2\, dt = 0, \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathbb{Q}^n. \tag{14.24}$$

Так как функция $t \to \partial_t u(t,x)$ непрерывна, то из (14.24) следует, что, для μ-почти всех $u_0 \in \mathcal{A}$, $\partial_t u(t,x) \equiv 0$ при $t \in [t_1, t_2]$ и всех $x \in \mathbb{Q}^n$. Так как функция $x \to \partial_t u(t,x)$ также непрерывна, то отсюда следует, что $\partial_t u(t,x) \equiv 0$ при $(t,x) \in [t_1,t_2] \times \mathbb{R}^n$ и, следовательно, $u_0 \in \mathcal{R}$. Итак, мы показали, что

$$\mu(\mathcal{R}) = 1, \tag{14.25}$$

откуда и следует вложение (14.22). Остается заметить, что всякая мера μ, удовлетворяющая (14.22), очевидно, является положением равновесия полугруппы (14.16). Лемма 14.1 доказана.

Теперь мы готовы доказать утверждение теоремы. Действительно, пусть μ – произвольная борелевская вероятностная мера на $\mathcal{A}$, инвариантная относительно расширенной полугруппы $\mathbb{S}_{(t,h)}$. Тогда из леммы 14.1 следует, что эта мера удовлетворяет условию (14.22), а следовательно метрическая энтропия полугруппы $\mathbb{S}_{(t,h)}$, посчитанная по этой мере (см. [63] или [71], [75]), равна нулю:

$$h_\mu(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}) = 0. \tag{14.26}$$

Так как равенство (14.25) справедливо для любой $\mathbb{S}_{(t,h)}$-инвариантной меры μ, то из вариационного принципа (см. [63], [71], [75]) следует, что топологическая энтропия этой полугруппы также равна нулю. Теорема 14.1 доказана.

Пример 14.3. Вернемся вновь к скалярному уравнению Chafee-Infante в $\mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u = \Delta_x u + \alpha^2 u - u^3, \quad u\big|_{t=0} = u_0, \quad \alpha > 0. \tag{14.27}$$

Из теоремы 14.1 следует, что топологическая энтропия пространственно-временной динамической системы $\mathbb{S}_{(t,h)}$, построенной по уравнению (14.26), равна нулю. Заметим, однако, что равенство (14.15) не означает, что пространственно-временная динамика, порождаемая уравнением (14.26) является тривиальной. Действительно, из теоремы 10.2 следует, что пространственная динамическая система $(\mathcal{A}, T_h)$ допускает гомеоморфное вложение схемы Бернулли с континуальным числом символов (см. (10.9)) и, следовательно, $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}) > 0$. Таким образом, *пространственная часть* $\mathbb{S}_{(t,h)}$ является хаотической. Тем не менее, представляется весьма правдоподобным, что при выполнении условий (14.12) динамическая система $\mathbb{S}_{(t,h)}$ не является хаотической *в направлении* t, соответствующему временной эволюции, то есть

$$\widehat{h}_t(\mathcal{A}, S_t) = 0, \quad \text{или даже} \quad h_{top}(\mathcal{A}, S_t) = 0 \tag{14.28}$$

что, в соответствии с теоремой 9.3, и влечет равенство (14.16). Эта гипотеза частично подтверждается результатом работы [60], в которой показано, что, при выполнении условий (14.12) и дополнительного условия на размерность: $n < 3$, система (3.1) не имеет ни одного периодического по времени решения (см., также, [54] и [74] для более детального изучения динамики, порождаемой уравнением (14.27) в случае малых размерностей $n = 1, 2$).

Пример 14.4. Рассмотрим теперь уравнение Chafee-Infante, возмущенное наличием транспортного члена,

$$\partial_t u = \Delta_x u - L\partial_{x_1} u + u - u^3, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ L > 0, \ u\big|_{t=0} = u_0. \tag{14.29}$$

Заметим, прежде всего, что заменой переменных $x' := x$, $t' = t + Lx_1$ это уравнение сводится к (14.27) с $\alpha = 1$. Поэтому, согласно теореме 14.1, топологическая энтропия пространственно-временной динамической системы $\mathbb{S}_{(t,h)}$ также равна нулю. Аналогично предыдущему примеру, уравнение (10.2) удовлетворяет всем условиям теоремы 10.2, и поэтому пространственная динамическая система $(\mathcal{A}, T_h)$ допускает вложение (10.9) схемы Бернулли с континуальным числом символом, и, таким образом, $\widehat{h}_{sp}(\mathcal{A}, T_h) > 0$. Более того, как нетрудно проверить, уравнение (14.29) удовлетворяет условиям теоремы 13.2, если $L > 2$. Поэтому, согласно (13.10), динамическая система $\mathbb{S}^{V_n}_{(t,h)}$,

$V_n = \mathrm{span}\{t, x_2, \cdots, x_n\}$, допускает вложение схемы Бернулли с континуальным числом символов и, следовательно,

$$\widehat{h}_n^{V_n}\left(\mathcal{A}, \mathbb{S}_{(t,h)}\right) > 0 \quad \text{и} \quad \widehat{h}_t(\mathcal{A}, S_t) > 0. \tag{14.30}$$

Таким образом, как пространственная так и временная часть динамики $\mathbb{S}_{(t,h)}$, порожденной уравнением (14.29), является хаотической, несмотря на то, что топологическая энтропия $\mathbb{S}_{(t,h)}$ равна нулю.

В завершение работы мы проиллюстрируем еще раз зависимость аттрактора $\mathcal{A}_\Omega$ уравнения (3.1) от вида области Ω и транспортного члена $(L, \nabla_x)u$. Для этого мы рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \partial_t u = a\Delta_x u - L\partial_{x_1} u + \lambda_0 u - f(u), \quad f(0) = 0, \quad L \in \mathbb{R}_+, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{14.31}$$

в ограниченной области Ω.

Предложение 14.3. *Пусть матрица диффузии a удовлетворяет условию* (3.2), *а нелинейная функция f – условиям* (3.5) *и* (3.6). *Предположим также, что выполнено условие* (11.6). *Тогда аттрактор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Omega$ уравнения* (14.31) *состоит из единственного положения равновесия*

$$\mathcal{A}_\Omega = \{0\}. \tag{14.32}$$

Доказательство. Действительно, пусть $u_1(t), u_2(t) \in \mathcal{A}$, $t \in \mathbb{R}$ – два полных решения задачи (14.31). И пусть $\theta(t) := e^{-\Lambda x_1}(u_1(t) - u_2(t))$, где Λ_0 такое же, как и в условии (11.6). Тогда эта функция удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t\theta = a\Delta_x\theta - (L - 2a\Lambda_0)\partial_{x_1}\theta - \\ - (L\Lambda_0 - a\Lambda_0^2 + l(t))\theta = 0, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{14.33}$$

где $l(t) := \int_0^1 f'(su_1(t) + (1-s)u_2(t))\,ds$. Умножив уравнение (14.33) скалярно в $\mathbb{R}^k$ на функцию $\theta(t)e^{-\varepsilon|t|}$ проинтегрировав по $(t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ и использовав условие (11.6) аналогично (11.15)–(11.17), получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\int_{t\in\mathbb{R}} \int_{x\in\Omega} e^{-\varepsilon|t|} |\theta(t,x)|^2\, dx\, dt \le 0. \tag{14.34}$$

Таким образом, $u_1 \equiv u_2$ и, следовательно, $\mathcal{A} = \{0\}$. Предложение 14.3 доказано.

Пример 14.5. Вернемся вновь к уравнению, рассмотренному в предыдущем примере и рассмотрим следующую краевую задачу в *ограниченной* области $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u = \Delta_x u - L\partial_{x_1} u + u - u^3, \quad x \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_0. \tag{14.35}$$

Тогда, согласно предложению 14.1, при выполнении условия $L > 2$ аттрактор $\mathcal{A}_\Omega$ задачи (14.35) состоит из единственной точки

$$\mathcal{A}_\Omega = \{0\} \tag{14.35}$$

(и не зависит от выбора ограниченной области Ω). Отметим, что при $L = 0$ аттрактор $\mathcal{A}_\Omega$ уравнения Chafee-Infante (14.35) является нетривиальным, если область Ω достаточно большая и растет с увеличением размеров ограниченной области Ω (см., например, [3]). Таким образом, наличие транспортного члена $(L, \nabla_x)u$ может не только усложнить поведение решений при $t \to \infty$, как это было в примере 14.4, но и существенно упростить его. Заметим также, что в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $L > 2$ аттрактор $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$ уравнения (14.35) является бесконечномерным, а соответствующая пространственная и временная динамика хаотической (см. пример 14.4). Таким образом, аттрактор $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$ не аппроксимируется соответствующими аттракторами $\mathcal{A}_\Omega$ в ограниченных областях.

Заключение.

В диссертации проведено детальное исследование пространственно-временной динамики, возникающей в диссипативных системах, порождаемых уравнениями математической физики в неограниченных областях. В качестве модельного примера такой диссипативной системы рассмотрена система уравнений реакции-диффузии. Основными результатами диссертации можно считать следующее:

(1) Исследована бесконечномерная динамика, возникающая в диссипативных системах, порождаемых уравнениями математической физики в неограниченных областях. Построены глобальные аттракторы для весьма общего класса систем реакции-диффузии, изучены вопросы, связанные с их гладкостью, пространственной структурой и характером притяжения к ним.

(2) Разработаны новые весьма эффективные методы исследования колмогоровской энтропии глобальных аттракторов в неограниченных областях, позволяющие получить точные оценки сверху и снизу энтропии аттракторов широкого класса уравнений математической физики, таких как различные типы уравнений реакции-диффузии, уравнение Гинзбурга-Ландау, диссипативные волновые уравнения и др.

(3) Найден универсальный тип асимптотики колмогоровской энтропии аттракторов диссипативных систем в неограниченных областях, зависящий от геометрии области, но не зависящий от выбора конкретного уравнения, принадлежащего весьма широкому классу уравнений математической физики.

(4) Предложен ряд новых характеристик сложности пространственно-временной динамики, обобщающих понятие топологической энтропии и фрактальной размерности, исследованы их основные свойства и соотношения между ними.

(5) Развита теория бесконечномерных существенно неустойчивых многообразий, не требующая гиперболичности исходного положения равновесия. На основе этой теории разработан метод описания пространственного и пространственно-временного хаоса, возникающего в уравнениях реакции-диффузии в неограниченных областях, в терминах схем Бернулли с бесконечным числом символов.

Литература.

1. Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы// УМНю Тю 22. N. 5. 1967. С. 107–172.

2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.– М.: Наука. 1974.

3. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений.– М.: Наука. 1989.

4. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.– М.: Наука. 1996.

5. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Кусочно-полинимиальные приближения функций классов W^α_p// Мат. Сборник. Т. 73. 1967. С. 331–335.

6. Вишик М. И. и Зелик С. В. Регулярный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области// Мат. Сборник.1999. Т. 190. N. 6. С. 23–58.

7. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Задача Коши. Итоги науки и техники. Сер. "Современные проблемы математики", Дифф. урав. с част. произв -3.– М.: ВИНИТИ. Т. 32. 1988. С. 5–98.

8. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи.– М.: Наука. 1980.

9. Зелик С. В. Аттрактор нелинейной системы реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$ и оценки его ε-энтропии// Мат. Заметки. Т. 65. N. 6. 1999. С. 941–943.

10. Зелик С. В. Аттрактор квазилинейного диссипативного гиперболического уравнения в $\mathbb{R}^n$: размерность и ε-энтропия// Мат. Заметки. Т. 67. N. 2. 2000. С. 304–307.

11. Зелик С. В. Многопараметррические полугруппы и аттракторы уравнений реакции-диффузии в $\mathbb{R}^n$// Труды ММО. Т. 55. 2004. С. 69–130.

12. Ильяшенко Ю. С., Четаев А. Н. О размерности аттракторов для одного класса диссипативных систем// ПММ. Т. 46. N. 3. 1982. С. 374–381.

13. Иосида К. Функциональный анализ.– М.: Мир. 1967.

14. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. Н. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах// УМН. Т. XIV, вып. 2(86). 1959. С. 3–86.

15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и

функционального анализа.– М: Наука. 1989.
16. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Итоги науки и техники. Сер. "Современные проблемы математики", Диф. урав. с част. произв – 3.– М.: ВИНИТИ. Т. 32. 1988. С. 100–215.
17. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.– М: Наука. 1980.
18. Кошелев А. И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.– М.: Наука. 1986.
19. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.– М.: Наука. 1985.
20. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.– М.: Наука. 1973.
21. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.: Наука. 1967.
22. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.– М.: Наука. 1971.
23. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнвния.– М: МГУ. 1978.
24. Лионс Ж. Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения.– М.: Наука. 1965.
25. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.– М.: УРСС. 2000.
26. Мильке А., Зелик С. В. Бесконечномерные траекторные аттракторы эллиптических краевых задач в цилиндрических областях// УМН. Т. 57. N. 4. 2002. С. 119–151.
27. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. (ред.) Нелинейные волны. Динамика и Эволюция. Сборник статей.– М.: Наука. 1989.
28. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике.– М.: Наука. 1988.
29. Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов.– М.: Наука. 1986.
30. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.– М.: Мир. 1980.

31. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов.– М.: Мир. 1983.
32. Чепыжов В. В., Вишик М. И. Колмогоровская ε-энтропия аттрактора уравнения реакции-диффузии// Мат. Сборник. Т. 189. N. 2. 1998. С. 81–110.
33. Шеффер Х. Топологические векторные пространства.– М.: Мир. 1971.
34. Abergel F. Existence and finite dimensionality of the global attractor for evolution equations on unbounded domains// J. Diff. Equ. 1990. V. 83. P. 85–108.
35. Afraimovich V., Babin A., Chow S. Spatial chaotic structure of attractors of reaction-diffusion systems// Trans. Am. Math. Soc. 1996. V. 348. N. 12. P. 5031–5063.
36. Afraimovich A., Bunimovich L. Density of Defects and Spatial Entropy in Extended Domains// Physica D. 1995. V. 80. P. 277–288.
37. Afraimovich A., Babin A., Chow S. Infinitely spatially complex solutions of PDE and their homotopy complexity// Comm. Anal. Geom. 2001. V. 9. N. 3. P. 281–339.
38. Afraimovich A., Pesin Ya., Tempelman A. Travelling Waves in Lattice Models of Multicomponent and Multidimensional media. II. Ergodic Properties and Dimension// Chaos. 1993. V. 3. N. 2. P. 233–241.
39. Agmon S., Nirenberg L. Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space// Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 207–229.
40 Angenent S. The shadowing lemma for elliptic PDE// Adv. Sci. Inst. Ser. F. Comput. Systems Sci. V. 37. 1987. P. 7–22
41. Babin A., Bunimovich L. Dynamics of Stable Chaotic Waves Generated by Hyperbolic PDE// Nonlinearity. 1996. V. 9. P. 853–875.
42. Babin A. V., Vishik M. I. Attractors of Partial Differential Evolution Equations in an Unbounded Domain// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1990. V. 116. N. 4. P. 221–243.
43. Babin A. V. On Space-Chaotic Solutions to Scalar Parabolic Equations with Modulated Nonlinearities// Rus. Jour. Math. Phys. 1995. V. 3. N. 3 P. 389–392.
44. Babin A. V. Topological Invariants and solutions with a High Complexity for Scalar Semilinear PDE// J. Dyn. Diff. Eqns. 2000. V. 12. N. 3. P. 599–646.

45. Boas R. Entire Functions.– New York Press. 1954.
46. Bunimovich L and Sinai Ya. Spacetime Chaos in Coupled Map Lattices// Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 491–516.
47. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Evolution equations and their trajectory attractors// J. Math. Pures Appl. 1997. V. 76. P. 913–964.
48. Chepyzhov V. V., and Vishik M. I. Attractors for Equations of Mathematical Physics.– AMS, Providence, RI. 2002.
49. Calsina À, Mora X., Solâ–Morales J. The Dynamical Approach to Elliptic Problems in Cylindrical Domains, and a Study of Their Parabolic Singular Limit// J. Diff. Eqns. 1993. V. 102. P. 244–304.
50. Collet P., Eckmann J.-P. Extensive properties of the complex Ginzburg–Landay equation// Commun. Math. Phys. 1999. V. 200. P. 699–722.
51. Collet P., Eckmann J.-P. The definition and measurement of the topological entropy per unit volume in parabolic PDE// Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 451-473.
52. Collet P., Eckmann J.-P. Topological entropy and ε–entropy for damped hyperbolic equations. Ann. Henri Poincarè. 2000. V. 1. P. 715–752.
53. Coti Zelati V., Rabinovich P. Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^n$// Comm. Pure Appl Math. 1992. V. 45. N. 10. P. 1217–1269.
54. Eckmann J.-P., Rougemont J. Coarsening by Ginzburg-Landau dynamics// Com. Math. Phys. 1999. V. 199. P. 441–470.
55. Efendiev M., Zelik S. V. The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system in an unbounded domain// Comm. Pure Appl. Math. 2001. V. 54. N. 6. P. 625–688.
56. Efendiev M., Zelik S. V. Upper and lower bounds for the Kolmogorov Entropy of the attractor for an RDE in an unbounded domain// J. Dyn. Dif. Eqns. 2002. V. 14. N. 2. P. 369–403.
57. Eden A., Foias C., Nikolaenko B., Temam R. Exponential attractors for dissipative evolution equations.– Masson, Paris. 1994.
58. Feireisl E. Bounded Locally Compact Global Attractors For Semilinear Damped Wave Equations on $\mathbb{R}^n$// Differential and Integral Equations. 1996. V. 9. N. 5. P. 1147–1156.
59. Feireisl E., Laurencot Ph., Simondon F., Toure H. Compact attractors for reaction-diffusion equations in R^n// C. R. Acad. Sci Paris Ser. I. 1994. V. 319. P. 147 – 151.
60. Gallay Th., Slijepčevič S. Energy Flow in Formally Gradient Partial

Differential Equations in Unbounded Domains// JDDE. 2001. V. 13. N. 4. P. 757–789.
61. Ginibre J. and Velo G. The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation I. Compactness methods// Physica D. 1996. V. 187. P. 45–79.
62. Hale J. Asymptotic behaviour of dissipative systems.– Math. Surveys and Mon. V. 25. Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1987.
63. Katok A. and Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems.– Cambridge University Press. 1995.
64. Kirchgassner K. Wave solutions of reversible systems and applications//J. Diff. Eqns. V. 45. N. 1. 1982. P. 113–127. **65.** Ladyzhenskaya O. A. Attractors for semigroups and evolution equations.– Cambridge Univ. Press. 1991.
66. Lindenstraus E., Weiss B. Mean topological dimension// Israel J. Math. 2000. V. 115. P. 1–24.
67. Merino S. On the existence of the global attractor for semilinear RDE on R^n//Journal Diff. Equations. 1996. V. 132. P. 87–106.
68. Mielke A. The complex Ginzburg–Landau equation on large and unbounded domains: sharper bounds and attractors// Nonlinearity. 1997. V. 10. P. 199–222.
69 Mielke A. Bounds for the solutions of the complex Ginzburg-Landau equation in terms of the dispersion parameters// Physica D. 1998. V. 117. P. 106 – 116.
70. Mielke A. and Schneider G. Attractors for modulation equations on unbounded domains – existence and comparison// Nonlinearity. 1995. V. 8. P. 743–768.
71. Moulin-Ollagnier J., Pinchon D. The Variational Principle// Studia Math. 1982. V. 72. N. 2. P. 151–159.
72. Pesin Ya. and Sinai Ya. Space-time Chaos in Chains of Weakly Coupled Hyperbolic Maps// Adv. in Soviet Math. 1991. V. 3.
73. Ruelle D. Turbulence, strange attractors and chaos.– World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises. V. 16. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ. 1995.
74. Slijepčevič S. Extended Gradient Systems: Dimension One// DCDS. 2000. V. 6. N. 3. P. 503–518.
75. Tagi-Zade A. A variational characterization of the topological entropy of continuous groups of transformations. The case of $\mathbb{R}^n$-actions// Math.

Notes. 1991. V. 49. N. 3-4. P. 305–311.
76. Temam R. Infinite–dimensional dynamical systems in mechanics and physics.– Springer-Verlag. 1988.
77. Zelik S. V. The Attractor for a Nonlinear Reaction-Diffusion System with a Supercritical Nonlinearity// Rend. Accad. Naz. Sci XL, Mem. di Mat. Appl. 2000. V. 24. P. 1–25.
78. Zelik S. V. The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system in an unbounded domain and Kolmogorov's ε-entropy. In: Equadiff 99. Proceedings of International Conference On Differential Equations, Berlin 1999, ed. by B.Fiedler, K.Groger and J.Sprekels. 1999. P. 704–710.
79. Zelik S. V. The attractor for a nonlinear hyperbolic equation in unbounded domain// Disc. Cont. Dyn. Sys. Ser. A. 2001. V. 7. N. 3. P. 593–641.
80. Zelik S. V. Attractors of reaction-diffusion systems in unbounded domains and their spatial complexity// Comm. Pure Appl. Math. 2003. V. 56. N. 5. P. 584–637.
81. Zelik S. V. Spatial and dynamical Chaos Generated by Reaction Diffusion Systems in Unbounded Domains// DANSE, FU-Berlin, Preprint 38/00. 2000. P. 1–60.
82. Zelik S. V. The attractor for an nonlinear reaction–diffusion system in an unbounded domain and Kolmogorov's ε–entropy// Mathem. Nachr. 2001. V. 232. P. 129–179.