ТРАЕКТОРНЫЙ АТТРАКТОР НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Зелик С.В.

Содержание

Введение.

Проблема исследования поведения решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными при больших значениях независимой переменной является весьма важной и интересной как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений в математической физике. В случае эволюционных систем уравнений одним из наиболее обещающих подходов к решению этой проблемы является теория аттракторов бесконечномерных динамических систем (см. [1], [25], [28], [29], [33]).

К настоящему времени существование аттрактора доказано для весьма широкого класса эволюционных уравнений в ограниченных областях, включающего двумерное уравнение Навье–Стокса, нелинейное гиперболическое уравнение с диссипацией, систему реакции диффузии, диссипативное нелинейное уравнение Шредингера и др. Для всех перечисленных выше уравнений в случае отсутствия в них явной зависимости от времени доказано, что аттрактор имеет конечную хаусдорфову и фрактальную размерность (несмотря на то, что фазовое пространство этих систем является бесконечномерным). Кроме того, при некоторых дополнительных ограничениях получен ряд весьма глубоких результатов о топологической структуре аттрактора, его гладкости и скорости притяжения к нему.

Основным препятствием к исследованию эллиптических уравнений в неограниченных областях методами теории динамических систем является некорректность задачи Коши для уравнений этого класса.

Попытки обойти это препятствие предпринимались, главным образом, для эллиптических уравнений в цилиндрической области. В этом случае за направление 'времени' естественно выбирается ось цилиндра. Так, в работах [23] и [24] используется метод, связанный с факторизацией оператора Лапласа и исследованием факторизованных уравнений при помощи теории аналитических полугрупп. Теория полугрупп многозначных отображений применяется для исследования этой задачи в работе [2].

При выполнении некоторых спектральных условий в работах [22], [30] и [31] построены конечномерные инвариантные многообразия, обладающие свойством экспоненциального притяжения траекторий соответствующей динамической системы.

Недавно в работах [26], [27] и [32] была предложена концепция траекторного аттрактора динамической системы, для построения которого не требуется единственности решений соответствующего уравнения. Наиболее впечатляющим достижением нового подхода стало доказательство существования аттрактора трехмерного уравнения Навье-Стокса и диссипативного нелинейного гиперболического уравнения с быстрорастущей нелинейностью.

Траекторный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области построен в работе [5].

В настоящей работе понятие траекторного аттрактора применяется для исследования решений систем уравнений эллиптического типа в некотором весьма широком классе неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, обладающих выделенным направлением $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$, сдвиг вдоль которого не выводит за пределы области. Это выделенное направление и выбирается в качестве направления 'времени'.

Модельной системой уравнений такого типа может служить следующая система:

$$\begin{cases} a\Delta u + \gamma\mathcal{D}u - f(u,x) = g(x) \\ x \in \Omega \quad ; \quad u\big|_{\partial\Omega} = u_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь $u = (u^1, \cdots, u^k)$, $f = (f^1, \cdots, f^k)$ и $g = (g^1, \cdots, g^k)$ – векторные функции, $x = (x^1, \cdots, x^n)$, Δ – оператор Лапласа по переменным $x = (x^1, \cdots, x^n)$, $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ – постоянная матрица, удовлетворяющая условию $a + a^* > 0$, а $\gamma\mathcal{D}u$ – дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\gamma\mathcal{D}u = \sum_{i=1}^{n} \gamma^i \partial_{x_i} u \quad , \quad \gamma^i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \tag{0.2}$$

Системы уравнений вида (0.1) при различных предположениях относительно нелинейной функции f, правой части g и геометрии области Ω изучались многими авторами (см., например, [9], [10], [12], [13], [14] и приведенную там литературу).

В данной работе предполагается, что нелинейная функция f удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} 1. \;\; f \in C(\mathbb{R}^k \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^k) \\ 2. \;\; f(u,x).u \geq -C_1 + C_2|u|^r \quad , \quad C_2 > 0 \\ 3. \;\; |f(u,x)| \leq C(1 + |u|^{r-1}) \;\; , \;\; r > 2 \end{cases} \tag{0.3}$$

Здесь и далее символ $u.v$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$.

Правая часть $g = (g^1, \cdots, g^k)$ предполагается принадлежащей пространству $\Xi(\Omega) = \left[W_{-1,2}^{\mathrm{loc}}(\Omega) + L_q^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$.

Под решением задачи (0.1) понимается функция u, принадлежащая пространству $\Theta(\Omega) = \left[W_{1,2}^{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L_r^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k$, удовлетворяющая (0.1) как равенству в пространстве $\Xi(\Omega)$ и имеющая заданный след $u_0 \in \mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ на границе $\partial\Omega$. Точные определения пространств Ξ, Θ и $\mathcal{V}_0$ приведены в §1.

В работе доказана разрешимость задачи (0.1) и исследуется поведение ее решений при $|x| \to \infty$. Центральную роль при этом играет следующая априорная оценка:

$$\|u, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_\Theta \le C_\varepsilon (1 + \|g, \Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_\Xi^r + \|u_0, \partial\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\mathcal{V}_0}^r) \tag{0.4}$$

Здесь u – решение задачи (0.1), $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число, $B_{x_0}^R$ – шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^k$ с центром в точке x_0, а константа C_ε зависит только от R, ε, r и констант C_1, C_2 и C, введенных в условии (0.3) (и не зависит от x_0 и Ω).

Выводу этой оценки посвящена глава 1. Кроме этого, в главе 1 исследованы некоторые вопросы, связанные гладкостью и ограниченностью при $|x| \to \infty$ решений задачи (0.1) (в случае цилиндрической области ограниченность решений эллиптической системы вида (0.1) при $|x| \to \infty$ доказана в работе [7]).

Отметим, что для получения этих результатов не требуется никаких ограничений на гладкость области Ω (то есть оценка (0.4) справедлива для решений задачи (0.1) в произвольной неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$).

В главе 2 дополнительно предполагается, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует некоторое выделенное направление $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$, такое что

$$\begin{cases} 1. \quad T_s\Omega \subset \Omega \quad , \quad \forall s \ge 0 \\ 2. \quad \bigcup_{s\ge 0} T_{-s}\Omega = \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{0.5}$$

где $T_s = T_s^l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяется по формуле $T_s x = x + s\vec{l}$.

Для простоты сначала рассматривается случай, когда нелинейность f не зависит явно от x

$$f(u, x) \equiv f(u) \tag{0.6}$$

Случай явной зависимости нелинейности f от x рассмотрен в §10.

При выполнении условия (0.6) для построения траекторного аттрактора, наряду с системой (0.1), совместно рассматривается следующее семейство уравнений вида (0.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} a\Delta u + \gamma\mathcal{D}u - f(u) = \xi(x) \\ \xi \in \mathcal{H}^{+}(g) \end{array} \right. \tag{0.7}$$

Здесь $\mathcal{H}^{+}(g)$ – оболочка правой части g исходного уравнения (0.1), определяемая следующим образом:

$$\mathcal{H}^{+}(g) = [T_s g, s \geq 0]_{\Xi^w} \tag{0.8}$$

Символом $[\,\cdot\,]_{\Xi^w}$ в формуле (0.8) обозначено замыкание в пространстве $\Xi^w(\Omega)$, то есть в пространстве $\Xi(\Omega)$, наделенном слабой топологией (см. §1).

Таким образом, семейство (0.7) порождается всеми положительными сдвигами исходного уравнения (0.1) вдоль направления $\vec{l}$, а также их пределами в соответствующей топологии, и следовательно, является инвариантным относительно этих сдвигов

$$T_s : \mathcal{H}^{+}(g) \to \mathcal{H}^{+}(g) \quad , \quad s \geq 0 \tag{0.9}$$

В дальнейшем предполагается, что оболочка $\mathcal{H}^{+}(g)$ является компактом в пространстве $\Xi^w(\Omega)$. (Функции $g \in \Xi(\Omega)$, удовлетворяющие этому условию называются трансляционно компактными в $\Xi^w(\Omega)$ в направлении $\vec{l}$. Необходимые и достаточные условия трансляционной компактности в пространстве $\Xi^w(\Omega)$ приведены в §8). В этом случае полугруппа $\{T_s, s \geq 0\}$, действующая в компактном топологическом пространстве $\mathcal{H}^{+}(g)$, обладает непустым ω-предельным множеством (аттрактором) в нем, которое (см. [26], [27]) может быть определено следующим образом:

$$\omega(g) = \bigcap\nolimits_{s\geq 0} \left[\bigcup\nolimits_{h\geq s} T_h \mathcal{H}^{+}(g)\right]_{\Xi^w} \tag{0.10}$$

Множество решений системы (0.7) с фиксированной правой частью ξ, принадлежащей оболочке $\mathcal{H}^{+}(g)$, обозначим символом K_ξ^{+} и рассмотрим множество всех решений семейства (0.7) из пространства $\Theta(\Omega)$

$$K^{+} = \cup_{\xi\in\mathcal{H}^{+}(g)} K_\xi^{+}$$

Множество K^+ наделим индуцированной вложением $K^+ \subset \Theta^w(\Omega)$ топологией (напомним, что символ $\Theta^w(\Omega)$ обозначает пространство $\Theta(\Omega)$, наделенное слабой топологией).

Из формулы (0.9) следует, что полугруппа $\{T_s, s \geq 0\}$ действует в пространстве K^+, то есть

$$T_s : K^+ \to K^+ \quad , \quad s \geq 0$$

Определение 1. Траекторным аттрактором уравнения (0.1) в пространстве $\Theta^w(\Omega)$ называется аттрактор полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$, действующей в топологическом пространстве K^+ (см. §6).

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (0.3), (0.5), (0.6), *и пусть правая часть g уравнения* (0.1) *является трансляционно компактной в пространстве $\Xi^w(\Omega)$. Тогда уравнение* (0.1) *обладает траекторным аттрактором $\mathcal{A}$ в пространстве $\Theta^w(\Omega)$.*

Следствие (см. §7). Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого шара $B^R_{x_0} \subset \Omega$ выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \lim_{s\to+\infty} \operatorname{dist}_{H_{1-\varepsilon,2}(B^R_{x_0})}\{T_s K^+\big|_{B^R_{x_0}}, \mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}\} = 0 \\ \lim_{s\to+\infty} \operatorname{dist}_{L_{r-\varepsilon}(B^R_{x_0})}\{T_s K^+\big|_{B^R_{x_0}}, \mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}\} = 0 \end{cases}$$

Здесь

$$\operatorname{dist}_{\dots}\{X, Y\} = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x - y\|_{\dots}$$

Для описания структуры построенного выше аттрактора вводится следующее множество:

$$\mathcal{Z}(g) = \{\xi \in \Xi(\mathbb{R}^n) \, : \, \Pi_\Omega T_s \xi \in \omega(g) \, , \ \forall s \in \mathbb{R}\}$$

Здесь символом Π_Ω обозначен оператор сужения функции на область Ω. Таким образом, множество $\mathcal{Z}(g)$ состоит из всех функций $\xi(t)$, определенных на всем $\mathbb{R}^n$ и принадлежащих пространству $\Xi(\mathbb{R}^n)$, таких что для любого $s \in \mathbb{R}$ сужение на область Ω функции $(T_s\xi)(t) = \xi(t+s)$ принадлежит ω-предельному множеству $\omega(g)$, определенному формулой (0.10).

Теорема 2. *Обозначим через K_ξ множество всех решений $u \in \Theta(\mathbb{R}^n)$ уравнения (0.7) в $\mathbb{R}^n$ с правой частью $\xi \in \mathcal{Z}(g)$. Тогда траекторный аттрактор $\mathcal{A}$ допускает следующее описание:*

$$\mathcal{A} = \Pi_\Omega \cup_{\xi \in \mathcal{Z}(g)} K_\xi \tag{0.11}$$

Предположим теперь, что матрица a в уравнении (0.1) является самосопряженной ($a = a^*$), а правая часть g принадлежит пространству $\left[L_p^{loc}(\Omega)\right]^k$ при некотором $p > \frac{n}{2}$ и трансляционно компактна в нем, то есть ее оболочка

$$\mathcal{H}^+(g) = [T_s g, s \geq 0]_{L_p^{loc}}$$

компактна в пространстве $\left[L_p^{loc}(\Omega)\right]^k$.

Теорема 3. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда для любого $B_{x_0}^R \subset \Omega$*

$$K^+\big|_{B_{x_0}^R} \subset H_{2,p}^{loc}(B_{x_0}^R)$$

и

$$\lim_{s \to +\infty} \operatorname{dist}_{H_{2,p}(B_{x_0}^R)}\{T_s K^+\big|_{B_{x_0}^R}, \mathcal{A}\big|_{B_{x_0}^R}\} = 0$$

Аналоги теорем 1–3 для случая явной зависимости нелинейной функции f от x приведены в §10.

Некоторые примеры эллиптических систем вида (0.1), траекторный аттрактор которых допускает явное описание, приведены в параграфе §11. Так, например, траекторный аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения

$$\begin{cases} \Delta u = u(u-1)^2(u-2)^2 \cdots (u-N)^2 \\ u\big|_\Omega = u_0 \end{cases} \tag{0.12}$$

в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям (0.5), содержит лишь положения равновесия

$$\mathcal{A} = \{u \equiv 0, 1, \cdots, N\}$$

Таким образом, согласно теореме 3, для любого решения u уравнения (0.12) (с краевым условием $u_0 \in \mathcal{V}_0(\partial\Omega)$) существует константа

$$j_u \in \{0, 1, \cdots, N\},$$

такая что для любого шара $B_{x_0}^R \subset \Omega$

$$\|u - j_u, T_s B_{x_0}^R\|_{2,p} \to 0 \quad \text{при } s \to +\infty \quad , \quad 1 \leq p < \infty$$

Отметим, что большинство результатов данной работы остаются справедливыми для существенно более широкого, чем уравнения вида (0.1), класса уравнений эллиптического и параболического типов.

Глава 1. Априорные оценки. Существование решений. Гладкость.

В этой главе получены априорные оценки решений нелинейной эллиптической системы (0.1), необходимые для построения ее траекторного аттрактора, и доказано существование решений этой задачи. Кроме того, исследован вопрос о повышении гладкости решений задачи (0.1) при более гладкой правой части уравнения. В качестве следствия доказанных оценок, получены некоторые теоремы об ограниченности решений эллиптической системы при $x \to \infty$.

Параграф 1 данной главы содержит определения и некоторые свойства функциональных пространств, используемых в дальнейшем.

В параграфе 2 доказана разрешимость задачи (0.1) в случае ограниченной области $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

В параграфе 3 получены равномерные по Ω априорные оценки решений и, на основании результатов §2, доказана разрешимость задачи (0.1) в случае произвольной области Ω .

В параграфе 4 исследуются вопросы повышения гладкости решений. В частности, выделены условия на u_0 и правую часть g, при выполнении которых всякое решение (0.1) принадлежит пространству $L_\infty(\Omega)$ (без предположений о регулярности границы $\partial\Omega$).

Следствия из равномерных оценок решений, полученных в параграфах 3 и 4, приведены в §5. Кроме того, в этом параграфе исследован вопрос об ограниченности решений при $x \to \infty$ в соответствующих функциональных пространствах.

§1 Функциональные пространства.

В этом параграфе мы определим ряд функциональных пространств, участвующих в формулировке и доказательстве результатов о разрешимости краевой задачи (0.1), и сформулируем некоторые свойства этих пространств. Для этого нам понадобятся некоторые сведения из теории линейных топологических пространств (ЛТП).

Определение 1. Пусть X – ЛТП. Множество $\mathcal{B} \subset X$ называется ограниченным, если оно поглощается любой окрестностью E нуля в X, то есть $\exists N = N(E)$, такое что $\frac{1}{n}\mathcal{B} \subset E$ при $n \geq N$.

Следствие 1. *Пусть X – локально выпуклое пространство (ЛВП) (см. [8], [16], [20]). Тогда подмножество $\mathcal{B} \subset X$ ограниченно тогда и только тогда, когда для любой полунормы $\| \cdot \|_p$ из семейства полунорм, определяющих топологию в X, выполнено неравенство*

$$\|\mathcal{B}\|_p \leq C = C(\| \cdot \|_p)$$

Определение 2. Пусть X – ЛТП. Обозначим через X^* – ЛВП всех линейных непрерывных функционалов на X. Система полунорм, задающая (сильную) топологию в X^*, определяется следующим образом (см. [20]):

$$\|T\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x \in \mathcal{B}} |Tx| \quad \mathcal{B} \text{ ограничено в } X \ \ (T \in X^*)$$

Слабая топология в пространстве X задается системой полунорм

$$\|x\|_T = |Tx| \ \ , \ \ T \in X^* \ \ (x \in X)$$

Пространство X, наделенное слабой топологией, обозначается символом X^w.

$*$-слабая топология в пространстве X^* задается системой полунорм

$$\|T\|_x = |Tx| \ \ , \ \ x \in X \ \ (T \in X^*)$$

Пространство X называется рефлексивным, если $(X^*)^* = X$.

Лемма 1 [8], [20]**.** *Пусть X – пространство Фреше (F–пространство). Тогда X рефлексивно тогда и только тогда, когда всякое ограниченное в X множество предкомпактно в X^w.*

Лемма 2 (теорема Эберлейна) [20]**.** *Пусть X – F–пространство. Тогда множество $\mathcal{B}$ предкомпактно в X^w тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ секвенциально предкомпактно в X^w, то есть, из любой последовательности $\{x_n\} \in \mathcal{B}$ можно выделить сходящуюся в X^w подпоследовательность.*

Лемма 3 [16]**.** *Пусть X – сепарабельное ЛВП. Тогда всякое ограниченное в X^* подмножество метризуемо в $*$-слабой топологии.*

Лемма 4 [20]**.** *Пусть X – ЛВП и $\mathcal{B} \subset X$. Тогда*

(1) *$\mathcal{B}$ ограничено в пространстве X^w тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$ ограничено в пространстве X.*

(2) *Пусть $\mathcal{B}$ выпукло. Тогда $\mathcal{B}$ замкнуто в X^w тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X.*

Лемма 5 [20]**.** *Пусть X – ЛВП и X_0 – его замкнутое подпространство. Тогда слабая топология в пространстве X_0 совпадает с топологией, индуцированной вложением $X_0 \subset X^w$.*

Дадим теперь определения функциональных пространств, анонсированных во введении.

Определение 3. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое открытое множество. Тогда, как обычно, символом $W_{l,p}(V)$ обозначается банахово пространство (B–пространство) обобщенных функций $v \in D'(V)$, производные которых до порядка l включительно принадлежат $L_p(V)$ (см. [17]). Символом $H_{l,p}(V)$ будем обозначать сужение пространства $W_{l,p}(\mathbb{R}^n)$ на множество V (см. [3], [18]). Как известно (см. [3]), если V – ограниченная область с достаточно гладкой границей, то пространства H и W совпадают.

Определение 4. Пусть V – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим символом $W^0_{1,2}(V)$ – замыкание пространства $C_0^\infty(V)$ в метрике пространства $W_{1,2}(V)$. Пространство $(W^0_{1,2}(V))^* \subset D'(V)$, сопряженное к пространству $W^0_{1,2}(V)$, будем обозначать символом $W_{-1,2}(V)$.

Пусть V – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда символом $W^{\mathrm{loc}}_{1,2}(V)$ обозначается пространство Фреше функций v из $D'(V)$, выделяемое системой полунорм

$$(1.1) \qquad \|v, V \cap B^R_{x_0}\|_{1,2} \equiv \|v\|_{W_{1,2}(V \cap B^R_{x_0})} < \infty \quad , \quad R \in \mathbb{R}_+ \ , \ x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Аналогично определяются пространства $W^{\mathrm{loc}}_{-1,2}(V)$ и $L^{\mathrm{loc}}_p(V), 1 \le p \le \infty$.

Определение 5. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\Theta(\Omega) = \left[W^{\mathrm{loc}}_{1,2}(\Omega) \cap L^{\mathrm{loc}}_r(\Omega)\right]^k$$

Здесь показатель r такой же, как и в (0.3). Полунормы в пространстве Θ вводятся следующим очевидным образом:

$$\|v, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_\Theta = \max\{\|v, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_{1,2}\ ,\ \|v, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_{0,r}\}\ ,\ R \in \mathbb{R}_+\ ,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Обозначим через $\Theta_0(\Omega)$ замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ в топологии пространства $\Theta(\Omega)$.

Пусть V – произвольное открытое множество. Обозначим символом $\Theta_0(\Omega\,,\,V)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)\big|_{\Omega\cap V}$ в пространстве $\Theta(\Omega \cap V)$. Нетрудно показать, что

$$\Theta_0(\Omega \cap V) \subset \Theta_0(\Omega\,,\,V) \subset \Theta(\Omega \cap V)$$

Обозначим также через $\Theta(\Omega\,,\,V)$ замыкание множества $\Theta(\Omega)\big|_{\Omega\cap V}$ в пространстве $\Theta(\Omega \cap V)$.

Определение 6. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\Xi(\Omega) = \left[W_{-1,2}^{\mathrm{loc}}(\Omega) + L_q^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k\ ,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

Пространство Ξ состоит из всех функций $g \in D'(\Omega)$, которые могут быть представлены в следующем виде:

$$g = g_1 + g_2\ \ ,\ \ g_1 \in \left[W_{-1,2}^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k\ ,\ g_2 \in \left[L_q^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k$$

Система полунорм в пространстве $\Xi(\Omega)$ задается следующим образом:

$$\|g, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_\Xi = \inf\Big\{\|g_1, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_{-1,2} + \|g_2, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_{0,q}\ :$$
$$g = g_1 + g_2\ \ ,\ \ g_1 \in \left[W_{-1,2}^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k\ ,\ g_2 \in \left[L_q^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k\Big\}\ ,\ R \in \mathbb{R}_+\ ,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ – еще одно открытое множество. Обозначим через $\Xi(\Omega\,,\,V)$ замыкание множества $\Xi(\Omega)\big|_{\Omega\cap V}$ в пространстве $\Xi(\Omega \cap V)$.

Определение 7. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathcal{V}_0(\partial\Omega) = \Theta(\Omega)\big/\Theta_0(\Omega)$$

Естественную проекцию $\pi\ :\ \Theta(\Omega) \to \mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ мы будем называть оператором сужения (следа) функций из $\Theta(\Omega)$ на границу $\partial\Omega$ $(u|_{\partial\Omega} \equiv \pi\, u)$, а пространство $\mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ – пространством следов функций из $\Theta(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$.

Нетрудно проверить, что для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ корректно определены отображения ограничения

$$(1.2) \qquad \Pi_V : \mathcal{V}_0(\partial\Omega) \to \mathcal{V}_0(\Omega, V) = \Theta(\Omega, V)/\Theta_0(\Omega, V)$$

Система полунорм в пространстве $\mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ задается следующим образом:

$$\|u_0, \partial\Omega \cap B^R_{x_0}\|_{\mathcal{V}_0} = \inf\Big\{\|w, \Omega \cap B^R_{x_0}\|_\Theta \ : \ w \in \Theta(\Omega)\ ,\ w|_{\partial\Omega} = u_0\Big\}\ ,\ R \in \mathbb{R}_+\ ,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Исследуем теперь структуру пространств, сопряженных к пространствам, введенным в определениях 5–7.

Теорема 1. *Пусть X – одно из пространств $\Theta(\Omega)$, $\Theta_0(\Omega)$, $\Xi(\Omega)$ или $\mathcal{V}_0(\partial\Omega)$. Тогда любой функционал T из X^* может быть представлен в следующем виде:*

$$(1.3) \qquad Tx = \left\langle l, x\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}} \right\rangle\ ,\ \ l \in X(\Omega, B^R_{x_0})^*\ (x \in X)$$

для некоторого $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$. Обратно, всякий $l \in X(\Omega, B^R_{x_0})^*$ задает линейный непрерывный функционал на X по формуле (1.3), в которой символом $\langle\cdot, \cdot\rangle$ обозначено каноническое спаривание пространств $X(\Omega, B^R_{x_0})$ и $X(\Omega, B^R_{x_0})^*$, и вложение $X(\Omega, B^R_{x_0})^* \subset X^*$, задаваемое формулой (1.3), непрерывно.

Доказательство. Так как функционал T непрерывен, то, согласно [8] и определениям полунорм в X, существует шар $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$, такой что

$$(1.4) \qquad |Tx| \le C\|x, \Omega \cap B^R_{x_0}\|_X = C\|\, x\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}\|_{X(\Omega, B^R_{x_0})}$$

Таким образом, линейный функционал T корректно определен на плотном подмножестве $X(\Omega)\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}}$ пространства $X(\Omega, B^R_{x_0})$ и равномерно непрерывен на нем, следовательно, T может быть единственным образом продолжен до линейного непрерывного функционала l на пространстве $X(\Omega, B^R_{x_0})$. Непрерывность вложения $X(\Omega, B^R_{x_0})^* \subset X^*$ очевидна. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Пусть X – такое же, как и в теореме 1. Тогда последовательность $x_n \in X$ слабо сходится к некоторому $x \in X$ тогда и только тогда, когда*

$$x_n\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}} \rightharpoonup x\big|_{\Omega\cap B^R_{x_0}} \tag{1.5}$$

в пространстве $X(\Omega\,,\,B^R_{x_0})$ для любого $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$.

Замечание 1. Пусть выполнены условия следствия 2. Тогда достаточно проверить условие (1.5) для какой-нибудь последовательности шаров $B^{R_k}_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию $R_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пусть $X = \Theta(\Omega)$ (или $\Theta_0(\Omega)$). Тогда, согласно лемме 5, достаточно проверять слабую сходимость (1.5) в пространстве $\Theta(\Omega \cap B^R_{x_0})$. Аналогичное утверждение справедливо и для пространства $\Xi(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть X – такое же, как и в теореме 1. Тогда пространства X и X^* – рефлексивны и сепарабельны.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы лишь для пространства $\Theta(\Omega)$. (Для остальных пространств теорема доказывается аналогично).

Очевидно, что для доказательства сепарабельности $\Theta(\Omega)$ достаточно доказать сепарабельность пространств

$$\Theta(\Omega \cap B^R_{x_0}) = \left[W_{1,2}(\Omega \cap B^R_{x_0}) \cap L_r(\Omega \cap B^R_{x_0})\right]^k$$

для любого $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$. Сепарабельность пространств $W_{1,2}$ и L_r доказана в [3]. Пространство $\Theta(\Omega \cap B^R_{x_0})$ изометрически изоморфно (замкнутому) подпространству декартова произведения

$$\mathcal{M} = \left[W_{1,2}(\Omega \cap B^R_{x_0}) \times L_r(\Omega \cap B^R_{x_0})\right]^k$$

состоящему из пар вида $\{z, z\}$, а следовательно, также сепарабельно. Таким образом, сепарабельность пространства $\Theta(\Omega)$ доказана.

Проверим рефлексивность пространства $\Theta(\Omega)$. Согласно критерию рефлексивности (лемма 1) и теореме Эберлейна (лемма 2), достаточно доказать, что любое ограниченное подмножество в X^w секвенциально предкомпактно. Таким образом, согласно следствию 2, замечанию 1 и канторовской диагональной процедуре, достаточно доказать рефлексивность пространств $\Theta(\Omega\,,\,B^R_{x_0})$ для любого шара $B^R_{x_0}\subset\mathbb{R}^n$. Докажем это утверждение.

Пространство $\Theta(\Omega\cap B^R_{x_0})$ рефлексивно как замкнутое подпространство рефлексивного B–пространства $\mathcal{M}$ (см. [20]). Аналогично, пространство $\Theta(\Omega\,,B^R_{x_0})$ рефлексивно как замкнутое подпространство рефлексивного B–пространства $\Theta(\Omega\cap B^R_{x_0})$. Таким образом, рефлексивность пространства $\Theta(\Omega)$ доказана.

Пространство $\Theta^*(\Omega\,,\,B^R_{x_0})$ сепарабельно как сопряженное к рефлексивному сепарабельному B–пространству. Таким образом, согласно теореме 1, пространство $\Theta^*(\Omega)$ также сепарабельно. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Пусть X – такое же, как и в теореме 2. Тогда всякое ограниченное подмножество $\mathcal{B}\subset X$ является метризуемым предкомпактом в пространстве X^w. В частности, любой предкомпакт в X^w метризуем.*

В дальнейшем нам понадобятся еще несколько свойств введенных выше пространств.

Лемма 6 (Неравенство Гальярдо - Ниренберга)[18]**.** *Пусть Ω – ограниченная область с достаточно гладкой границей, $u\in W_{l_1,p_1}(\Omega)\cap W_{l_2,p_2}(\Omega)$*

$$\begin{cases} 1<p_1,p_2<\infty \quad ; \quad 0\le l_1,l_2<\infty \quad ; \quad \theta\in[0,1] \\ l=l_1\theta+(1-\theta)l_2 \quad ; \quad \frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{p_2} \end{cases}$$

Тогда $u\in W_{l,p}(\Omega)$ и

$$\|u,\Omega\|_{l,p}\le C\|u,\Omega\|^{\theta}_{l_1,p_1}\|u,\Omega\|^{1-\theta}_{l_2,p_2}$$

Здесь символом $\|\cdot\,,\,\Omega\|_{l,p}$ обозначена норма в пространстве $W_{l,p}(\Omega)$

Следствие 4. *Пусть V – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $0<\delta\le p-1$ имеет место следующее компактное вложение:*

$$\Theta_0(V)\subset\subset L_{r-\delta}(V) \tag{1.6}$$

Доказательство. Так как любая функция $u\in\Theta_0(V)$ может быть продолжена нулем до функции $\widehat{u}\in\Theta(\mathbb{R}^n)$ с сохранением нормы, то достаточно доказать утверждение следствия для ограниченной области Ω с гладкой границей (и удовлетворяющей условию $V\subset\subset\Omega$).

Согласно неравенству Гальярдо–Ниренберга, $\Theta(\Omega) \subset W_{\varepsilon,r-\delta}(\Omega)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ (при $l_1 = 1$, $l_2 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = r$ и соответствующем выборе $\theta \in [0,1]$). Как известно (см. [17]), вложение $W_{\varepsilon,r-\delta}(\Omega) \subset L_{r-\delta}(\Omega)$ компактно при $\varepsilon > 0$. Следствие 4 доказано.

Теорема 3. *Пусть Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда оператор Лапласа отображает пространство $W_{1,2}(\Omega)$ в пространство $W_{-1,2}(\Omega)$. Более того, справедлива оценка*

$$\|\Delta u, \Omega\|_{-1,2} \le \|u, \Omega\|_{1,2}\ ,\ \forall u \in W_{1,2}(\Omega) \tag{1.7}$$

Доказательство. Из определения обобщенных производных и пространства $W_{1,2}(\Omega)$ следует, что

$$|\,\langle \Delta u, \varphi\rangle\,| \equiv |\,\langle u, \Delta\varphi\rangle\,| = |\,\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle\,| \le \|u, \Omega\|_{1,2}\|\varphi, \Omega\|_{1,2}$$

для любой $\varphi \in D(\Omega)$. Следовательно,

$$\|\Delta u, \Omega\|_{-1,2} = \sup\big\{\langle \Delta u, \varphi\rangle \,/ \|\varphi, \Omega\|_{1,2}\ : \varphi \in D(\Omega)\big\} \le \|u, \Omega\|_{1,2}$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное открытое множество. Тогда для любых $u \in \Theta_0(\Omega)$ и $g \in \Xi(\Omega)$ справедлива следующая оценка:*

$$|\,\langle u, g\rangle\,| \le \|u, \Omega\|_{\Theta}\|g, \Omega\|_{\Xi} \tag{1.8}$$

Здесь через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначено скалярное произведение в $[L_2(\Omega)]^k$ (продолженное по непрерывности на соответствующие пространства обобщенных функций).

Доказательство. Пусть $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in [W_{-1,2}(\Omega)]^k$ и $g_2 \in [L_q(\Omega)]^k$. Тогда

$$\begin{aligned}|\,\langle u, g\rangle\,| \le |\,\langle u, g_1\rangle\,| + |\,\langle u, g_2\rangle\,| \le \|u, \Omega\|_{1,2}\|g_1, \Omega\|_{-1,2} + \\ + \|u, \Omega\|_{0,r}\|g_2, \Omega\|_{0,q} \le \|u, \Omega\|_{\Theta}(\|g_1, \Omega\|_{-1,2} + \|g_2, \Omega\|_{0,q})\end{aligned}$$

Переходя в последнем неравенстве к нижней грани по всем представлениям g в виде суммы $g = g_1 + g_2$, получим неравенство (1.8). Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Согласно [21], справедлива следующая формула:

$$(\mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2)^* = \mathbb{D}_1^* + \mathbb{D}_2^*$$

Здесь $\mathbb{D}_i \subset D'(\Omega)$, $i = 1, 2$ – некоторые банаховы пространства, такие что их пересечение плотно как в первом, так и во втором пространстве.

Таким образом, в случае ограниченной области Ω, пространства $\Theta_0(\Omega)$ и $\Xi(\Omega)$ являются взаимно сопряженными.

§2 *Существование решений в ограниченной области.*

В этом параграфе при помощи метода Фаэдо–Галеркина будет построено решение задачи (0.1) в случае ограниченного открытого множества $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Для построения этого решения рассмотрим функцию $v \in \Theta(\Omega)$, такую что $v\big|_{\partial\Omega} = u_0$ и $\|v, \Omega\|_\Theta \le 2\|u_0, \partial\Omega\|_{\mathcal{V}_0}$ (такая функция существует по определению факторпространства $\mathcal{V}_0(\partial\Omega)$) и перепишем уравнение (0.1) относительно функции $w = u - v$. Получим

$$\begin{cases} a\Delta w + \gamma\mathcal{D}w - f(w+v, x) = g(x) - a\Delta v - \gamma\mathcal{D}v \equiv g_1(x) \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Пусть $\{e_i(x) : i \in \mathbb{N}\}$, где $e_i(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ – ортонормированная система в пространстве $[L_2(\Omega)]^k$, являющаяся полной в пространстве $\Theta_0(\Omega)$ (используя определение пространства $\Theta_0(\Omega)$ и процедуру диагонализации Грама–Шмидта, нетрудно показать, что такая система существует). Ортопроектор на подпространство, порожденное первыми N векторами этой системы, обозначим через P_N. Рассмотрим следующую конечномерную систему уравнений Галеркина, аппроксимирующую задачу (2.1):

$$P_N\big(a\Delta w_N + \gamma\mathcal{D}w_N - f(w_N + v, x) - g_1(x)\big) = 0 \tag{2.2}$$

Здесь $w_N \in V_N \equiv P_N\,[L_2(\Omega)]^k$.

Теорема 1. *Система уравнений* (2.2) *обладает хотя бы одним решением при любом* $N \in \mathbb{N}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть V_N – конечномерное евклидово пространство, и пусть непрерывное отображение $F : V_N \to V_N$ обладает следующим свойством:*

$$\langle F(z), z\rangle \geq 0 \quad \forall z \in \partial B_0^R \tag{2.3}$$

где B_0^R – шар радиуса R в пространстве V_N. Тогда уравнение $F(z) = 0$ обладает хотя бы одним решением в замкнутом шаре $B_0^R \cup \partial B_0^R$.

Доказательство. Предположим что $F(z) \neq 0$ для любого $z \in \partial B_0^R$ (в противном случае доказывать нечего) и рассмотрим непрерывное однопараметрическое семейство отображений $\Phi_t(z) = tF(z)+(1-t)z$, $t \in [0, 1]$. Нетрудно проверить, что в этом случае $\Phi_t(\partial B_0^R) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Таким образом, степени отображений $\Phi_0 = \mathrm{Id}$ и $\Phi_1 = F$ (см. [19]) совпадают

$$\deg(F, B_0^R, 0) = \deg(\mathrm{Id}, B_0^R, 0) = 1$$

Следовательно уравнение $F(z) = 0$ разрешимо в шаре B_0^R. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Определим функцию $F : V_N \to V_N$ следующим образом:

$$F(z) = -P_N\big(a\Delta z + \gamma\mathcal{D}z - f(z + v, x) - g_1(x)\big) \quad , \quad z \in V_N$$

Нетрудно проверить, что $F \in C(V_N, V_N)$. Проверим условие (2.3) леммы 1. Имеем

$$\langle F(z), z\rangle = -\langle a\Delta z, z\rangle - \langle\gamma\mathcal{D}z, z\rangle + \langle f(z + v, x), z\rangle + \langle g_1(x), z\rangle \tag{2.4}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в формуле (2.4). Так как матрица a имеет положительно определенную симметрическую часть, то

$$\begin{aligned} -\langle a\Delta z, z\rangle = \langle a\nabla z, \nabla z\rangle = \frac{1}{2}\langle(a + a^*)\nabla z, \nabla z\rangle \geq \\ \geq C(\|z, \Omega\|_{1,2}^2 + \|z, \Omega\|_{0,2}^2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь и далее

$$\langle a\nabla u, \nabla v\rangle \equiv \sum_{l=1}^{k}\langle a\partial_{x^l}u.\partial_{x^l}u\rangle$$

Согласно условиям (0.3) на нелинейную функцию f,

$$(2.6)\quad \langle f(z+v,x),z\rangle = \langle f(z+v,x),z+v\rangle - \langle f(z+v,x),v\rangle \geq$$
$$\geq \langle -C_1 + C_2|z+v|^r, 1\rangle - \big\langle C(1+|z+v|^{r-1})|v|, 1\big\rangle \geq$$
$$\geq \langle -C_1 + 2C_3(|z|^r - |v|^r), 1\rangle - \langle C + C_3|z|^r + C_4|v|^r, 1\rangle \geq$$
$$\geq C_0\|z,\Omega\|^r_{0,r} - C(1+\|u_0,\partial\Omega\|^r_{\mathcal{V}_0})$$

Согласно неравенству Гельдера с показателями 2, r и $\frac{2r}{r-2}$,

$$(2.7)\qquad |\,\langle\gamma\mathcal{D}z,z\rangle\,| \leq \mu\|z,\Omega\|^2_{1,2} + \mu\|z,\Omega\|^r_{0,r} + C_\mu \quad , \quad C_\mu = C_\mu(|\Omega|)$$

Формула (2.7) справедлива при любом положительном μ.

Согласно оценке (1.8),

$$(2.8)\quad |\,\langle g_1(x),z\rangle\,| \leq \|z,\Omega\|_\Theta \|g_1,\Omega\|_\Xi \leq$$
$$\leq C_\mu(1+\|g_1,\Omega\|^2_\Xi) + \mu\|z,\Omega\|^2_{1,2} + \mu\|z,\Omega\|^r_{0,r}$$

Подставляя оценки (2.5), (2.6), (2.7) и (2.8) в равенство (2.4), учитывая (1.7), при достаточно малом μ получим следующую оценку:

$$(2.9)\quad \langle F(z),z\rangle \geq C(\|z,\Omega\|^r_{0,r} + \|z,\Omega\|^2_{1,2} + \|z,\Omega\|^2_{0,2}) -$$
$$- C_1(1+\|u_0,\partial\Omega\|^r_{\mathcal{V}_0} + \|g,\Omega\|^2_\Xi)\ ,\ C>0$$

Из оценки (2.9) следует, что для достаточно большого шара

$$B_0^R = \{z\in V_N\ :\ \|z,\Omega\|_{0,2} < R\}$$

условие (2.3) леммы 1 выполнено. Таким образом, согласно лемме 1, задача (2.2) имеет хотя бы одно решение $z = w_N$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть* w_N *– решение задачи* (2.2). *Тогда, равномерно по* $N\in\mathbb{N}$ *справедлива следующая оценка:*

$$(2.10)\qquad \|w_N,\Omega\|_\Theta \leq C(1+\|u_0,\partial\Omega\|^r_{\mathcal{V}_0} + \|g,\Omega\|^2_\Xi)$$

Доказательство. Подставим в формулу (2.9) $z = w_N$. Тогда, учитывая что $F(w_N) = 0$, получим оценку (2.10).

Теперь мы готовы осуществить предельный переход в системе Галеркина.

Теорема 2. *Задача (2.1) обладает хотя бы одним решением в пространстве $\Theta(\Omega)$ для любого ограниченного открытого множества $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Благодаря равномерной оценке (2.10) и утверждению теоремы 1.2, без ограничения общности можно считать, что последовательность w_N решений задач (2.2) слабо сходится в пространстве $\Theta_0(\Omega)$ к некоторой функции $w \in \Theta_0(\Omega)$. Докажем, что w есть искомое решение. Согласно определению обобщенного решения задачи (2.1), достаточно доказать, что

$$-\langle a\nabla w, \nabla\Phi\rangle + \langle\gamma\mathcal{D}w, \Phi\rangle - \langle f(w+v,x), \Phi\rangle = \langle g_1(x), \Phi\rangle \tag{2.11}$$

для любой $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Пусть сначала $\Phi = P_{N_0}\Phi$ при некотором $N_0 \in \mathbb{N}$. Тогда, умножив скалярно уравнение (2.2) на Φ, при достаточно больших N получим

$$-\langle a\nabla w_N, \nabla\Phi\rangle + \langle\gamma\mathcal{D}w_N, \Phi\rangle - \langle f(w_N+v,x), \Phi\rangle = \langle g_1(x), \Phi\rangle \tag{2.12}$$

Из определения пространства $\Theta_0(\Omega)$ следует, что

$$-\langle a\nabla w_N, \nabla\Phi\rangle \to -\langle a\nabla w, \nabla\Phi\rangle \text{ при } N\to\infty$$
$$\langle\gamma\mathcal{D}w_N, \Phi\rangle \to \langle\gamma\mathcal{D}w, \Phi\rangle \text{ при } N\to\infty$$

Докажем, что

$$\langle f(w_N+v,x), \Phi\rangle \to \langle f(w+v,x), \Phi\rangle \text{ при } N\to\infty \tag{2.13}$$

Благодаря пунктам 1) и 3) условий (0.3), отображение $G(z) = f(z+v,x)$ непрерывно как отображение из $[L_{r-1}(\Omega)]^k$ в $[L_1(\Omega)]^k$ (см. [11]), а благодаря следствию 1.4, $w_N \to w$ сильно в пространстве $[L_{r-1}(\Omega)]^k$. Таким образом $f(w_N+v) \to f(w+v)$ в пространстве $[L_1(\Omega)]^k$. Соотношение (2.13) доказано.

Итак, равенство (2.7) справедливо для всех Φ, удовлетворяющих условию: $\Phi = P_N\Phi$ при некотором $N \in \mathbb{N}$. Но система функций $e_i(x)$ полна в пространстве $\Theta_0(\Omega)$, следовательно, равенство (2.7) справедливо для любой $\Phi \in \Theta_0(\Omega)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Для любой ограниченной области $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ задача (0.1) обладает хотя бы одним решением из пространства $\Theta(\Omega)$.*

§3 Равномерные априорные оценки. Существование решений в неограниченной области.

В этом параграфе доказана равномерная по $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ априорная оценка вида (0.4) и на ее основе получена разрешимость задачи (0.1) в произвольной неограниченной области.

Теорема 1. *Пусть Ω – произвольная область, $u_0 \in \mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ и u – решение задачи* (0.1)*. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\|u, B^R_{x_0} \cap \Omega\|_{\Theta} \le C_\varepsilon(1 + \|g, B^{R+\varepsilon}_{x_0} \cap \Omega\|^2_{\Xi} + \|u_0, B^{R+\varepsilon}_{x_0} \cap \partial\Omega\|^r_{\mathcal{V}_0}) \tag{3.1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число, а константа C_ε зависит только от ε, R и констант, введенных в условии (0.3) *(и не зависит от $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$).*

Доказательство. Фиксируем произвольные $R, \varepsilon > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$. По определению пространства $\mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ существует $v \in \Theta(\Omega)$, такая что

$$\|v, \Omega \cap B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|_{\Theta} \le 2\|u_0, \partial\Omega \cap B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|_{\mathcal{V}_0} \quad \text{и} \quad v\big|_{\partial\Omega} = u_0 \tag{3.2}$$

Таким образом, $w = u - v \in \Theta_0(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению

$$a\Delta w + \gamma\mathcal{D}w - f(w + v, x) = g(x) - a\Delta v - \gamma\mathcal{D}v \equiv g_1(x) \tag{3.3}$$

Определим срезающую функцию $\phi(x)$ следующим образом:

$$\phi(x) = \begin{cases} (R + \varepsilon/2 - |x - x_0|)^{2r/r-2} & ; \quad |x - x_0| < R + \varepsilon/2 \\ 0 & ; \quad |x - x_0| \ge R + \varepsilon/2 \end{cases} \tag{3.4}$$

Лемма 1. *Функция ϕ удовлетворяет следующей оценке:*

$$|\nabla\phi(x)| \le C\phi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

Справедливость оценки (3.5) проверяется непосредственным вычислением.

Умножив уравнение (3.3) скалярно в пространстве $[L_2(\Omega)]^k$ на функцию ϕw, получим

$$\langle a\Delta w, \phi w\rangle + \langle\gamma\mathcal{D}w, \phi w\rangle - \langle f(w + v, x), \phi w\rangle = \langle g_1, \phi w\rangle \tag{3.6}$$

Так как $\phi w \in \Theta_0(\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon})$, то, проинтегрировав первое слагаемое в левой части уравнения (3.5) по частям, используя положительную определенность матрицы a, неравенство Коши–Буняковского и оценку (3.5), получим

$$
\begin{aligned}
(3.7)\qquad - \langle a\Delta w, \phi w\rangle = \langle a\nabla w, \nabla(\phi w)\rangle = \langle \phi a\nabla w, \nabla w\rangle + \langle a\nabla w, \nabla\phi w\rangle \geq \\
\geq 2C\left\langle \phi|\nabla w|^2, 1\right\rangle - C_1\left\langle \phi^{1/2}|\nabla w|, |\nabla\phi|\phi^{-1/2}|w|\right\rangle \geq \\
\geq C\left\langle \phi|\nabla w|^2, 1\right\rangle - C_2\left\langle \phi^{2/r}|w|^2, 1\right\rangle
\end{aligned}
$$

Из условий (0.3), аналогично (2.6) получаем

$$
(3.8)\qquad \langle \phi f(w+v,x), w\rangle \geq C_1\langle \phi|w|^r, 1\rangle - C_2(1 + \|u_0, \partial\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\mathcal{V}_0}^r)
$$

Согласно оценке (1.8),

$$
\begin{aligned}
(3.9)\qquad |\langle g_1, \phi w\rangle| \leq \|g_1, \Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\Xi}\|\phi w, \Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\Theta} \leq \\
\leq \mu\left\langle \phi|\nabla w|^2, 1\right\rangle + \mu\langle \phi|w|^r, 1\rangle + \\
+ C_\mu(1 + \left\langle \phi^{2/r}|w|^2, 1\right\rangle + \|g, \Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\Xi}^2 + \|u_0, \partial\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\mathcal{V}_0}^r)
\end{aligned}
$$

Здесь μ – произвольное положительное число.

И, наконец,

$$
(3.10)\qquad |\langle \gamma\mathcal{D}w, \phi w\rangle| \leq \mu\left\langle \phi|\nabla w|^2, 1\right\rangle + C_\mu\left\langle \phi^{2/r}|w|^2, 1\right\rangle
$$

Подставляя оценки (3.6) – (3.10) в равенство (3.5), получим при достаточно малом $\mu > 0$

$$
\begin{aligned}
(3.11)\qquad \left\langle \phi|\nabla w|^2, 1\right\rangle + \langle \phi|w|^r, 1\rangle - C\left\langle \phi^{2/r}|w|^2, 1\right\rangle \leq \\
\leq C_1(1 + \|g, \Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\Xi}^2 + \|u_0, \partial\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\mathcal{V}_0}^r)
\end{aligned}
$$

Согласно неравенству Гельдера,

$$
\left\langle \phi^{2/r}|w|^2, 1\right\rangle = \left\langle |\phi^{1/r}w|^2, 1\right\rangle \leq \mu\left\langle |\phi^{1/r}w|^r, 1\right\rangle + C_\mu = \mu\langle \phi|w|^r, 1\rangle + C_\mu
$$

Подставив эту оценку в неравенство (3.11), получим при достаточно малом μ

$$(3.12)\quad \big\langle \phi|\nabla w|^2, 1\big\rangle + \langle \phi|w|^r, 1\rangle \leq$$
$$\leq C_0(1 + \|g, \Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\Xi}^2 + \|u_0, \partial\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\mathcal{V}_0}^r)$$

Так как $\phi(x) > C > 0$ при $x \in B_{x_0}^R$, то из последней формулы следует оценка (3.1). Теорема 1 доказана.

Теперь мы готовы доказать разрешимость задачи (0.1) в случае неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Задача* (0.1) *разрешима в пространстве* $\Theta(\Omega)$ *при любой* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *и любом* $u_0 \in \mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ *.*

Доказательство. В случае если $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ теорема доказана в §2. Предположим, что Ω неограничена. Представим область Ω в следующем виде:

$$\Omega = \bigcup_{M=1}^{\infty} \Omega_M \ , \quad \text{где} \quad \Omega_M = \Omega \cap B_0^M$$

Рассмотрим последовательность срезающих функций $\phi_M(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, таких что $0 \leq \phi_M \leq 1$; $\phi_M = 1$ при $x \in B_0^{M-1}$ и $\phi_M = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_0^M$ и определим последовательность краевых условий

$$u_0^M = (\phi_M v)\big|_{\partial\Omega_M} \ , \quad \text{где} \quad v \in \Theta(\Omega) \ , \ v\big|_{\partial\Omega} = u_0$$

Нетрудно проверить, что $u_0^M \in \mathcal{V}_0(\partial\Omega_M)$ и

$$(3.13)\qquad u_0^M\big|_{\partial\Omega\cap B_0^{M-1}} = u_0\big|_{\partial\Omega\cap B_0^{M-1}} \ \ ; \ \ u_0^M\big|_{\partial\Omega_M\setminus\partial\Omega} = 0$$

Согласно теореме 2.2, для любого $M \in \mathbb{N}$ существует решение u_M задачи (0.1) в области Ω_M с правой частью $g_M = g\big|_{\Omega_M}$ и краевым условием $u_M\big|_{\partial\Omega_M} = u_0^M$.

Согласно теореме 3.1, справедлива следующая оценка:

$$(3.14)\qquad \|u_M, \Omega_N\|_\Theta \leq C_N \quad \text{равномерно по } M \geq N+1$$

Так как пространство $\Theta_0(\Omega_N)$ рефлексивно, то, согласно формуле (3.13) и оценке (3.14), мы можем, используя диагональную процедуру, выделить из u_M подпоследовательность (которую мы для простоты также обозначим через u_M), слабо сходящуюся к некоторой функции $u \in \Theta(\Omega)$

$$(3.15) \qquad u_M\big|_{\partial\Omega_N} \rightharpoonup u\big|_{\partial\Omega_N} \quad \text{в} \quad \Theta(\Omega_N) \ , \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ , \ \ M \geq N+1$$

Докажем, что u – искомое решение. Из условий (3.13) сразу следует, что $u\big|_{\partial\Omega} = u_0$. Пусть $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\operatorname{supp}\Phi \subset \Omega_K$. Тогда при $M > K$

$$(3.16) \qquad -\langle a\nabla u_M, \nabla\Phi\rangle + \langle \gamma\mathcal{D}u_M, \Phi\rangle - \langle f(u_M, x), \Phi\rangle = \langle g, \Phi\rangle$$

Аналогично доказательству теоремы 2.2, переходя к пределу $m \to \infty$ в равенстве (3.16), получаем

$$-\langle a\nabla u, \nabla\Phi\rangle + \langle \gamma\mathcal{D}u, \Phi\rangle - \langle f(u, x), \Phi\rangle = \langle g, \Phi\rangle$$

То есть u – решение задачи (0.1). Теорема 2 доказана.

§4 *Гладкость решений*

В этом параграфе мы докажем несколько теорем о дополнительной гладкости решений задачи (0.1) при более гладкой правой части $g(x)$.

Предположим сначала, что выполнено условие

$$(4.1) \quad g \in \left[L_q^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k, \text{ где } \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 \text{ , а показатель } r \text{ определен в (0.3)}$$

Теорема 1. *Пусть u – решение задачи* (0.1), *выполнено условие* (4.1) *и* $B_{x_0}^R \subset\subset \Omega$. *Тогда* $u \in \left[H_{2,q}(B_{x_0}^R)\right]^k$ *и справедлива следующая оценка:*

$$(4.2) \qquad \|u, B_{x_0}^R\|_{2,q} \leq C(1 + \|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,q}^{2r}) \ , \quad \text{где} \quad B_{x_0}^{R+\varepsilon} \subset\subset \Omega$$

Доказательство. Определим срезающую функцию $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, такую что $\phi(x) = 1$ при $|x - x_0| \leq R$ и $\phi(x) = 0$ при $|x - x_0| \geq R + \varepsilon$. Умножив уравнение (0.1) на ϕ, после элементарных преобразований получим

$$(4.3) \quad \begin{cases} \Delta(\phi u) = 2\nabla\phi . \nabla u + \Delta\phi u + a^{-1}\left[-\phi\gamma\mathcal{D}u + \phi f(u, x) + \phi g\right] \equiv g_2(x) \\ \phi u\big|_{B_{x_0}^{R+\varepsilon}} = 0 \end{cases}$$

Здесь $\nabla\phi.\nabla u = \sum_{i=1}^{k} \partial_i \phi \partial_i u$.

Согласно оценке (3.1),

$$(4.4) \quad \|g_2, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,q} \le C(1 + \|u, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{\Theta}^{r} + \|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,q}) \le \\ \le C_1(1 + \|g, B_{x_0}^{R+2\varepsilon}\|_{0,q}^{2r})$$

Применив к уравнению (4.3) теорему об L_q–регулярности решений уравнения Лапласа (см.[18]), получим

$$(4.5) \qquad \|u, B_{x_0}^{R}\|_{2,q} \le C\|\phi u, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{2,q} \le C_1\|g_2, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,q}$$

Оценка (4.2) следует непосредственно из оценок (4.4) и (4.5). Теорема 1 доказана.

Предположим теперь, что матрица a в левой части уравнения (0.1) является самосопряженной $a = a^* > 0$ и выполнено условие

$$(4.6) \qquad g \in \left[L_p^{\mathrm{loc}}(\Omega)\right]^k \quad \text{при некотором} \quad p > \frac{n}{2}$$

Предположим также, что краевое условие u_0 удовлетворяет следующему условию регулярности:

$$(4.6') \qquad \exists v \in \Theta(\Omega) \ ; \ v\big|_{\partial\Omega} = u_0 \ ; \ v\big|_{\Omega\cap B_{x_0}^{R+\varepsilon}} \in H_{2,p}(\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon})$$

Напомним, что в отличии от пространства $W_{l,p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, символом $H_{l,p}(\Omega)$ мы обозначаем ограничение пространства $W_{l,p}(\mathbb{R}^n)$ на множество Ω.

Тогда справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2. *Пусть $u \in \Theta(\Omega)$ – решение задачи (0.1), и выполнены перечисленные выше условия. Тогда $u \in \left[L_\infty(B_{x_0}^{R} \cap \Omega)\right]^k$ и справедлива следующая оценка:*

$$(4.7) \quad \|u, B_{x_0}^{R} \cap \Omega\|_{0,\infty} \le Q(\|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon} \cap \Omega\|_{0,p}) + Q(\|v, B_{x_0}^{R+\varepsilon} \cap \Omega\|_{H_{2,p}})$$

Здесь $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – некоторая монотонная функция, зависящая только от функции f и констант R и ε.

Доказательство. Ограничимся для простоты лишь случаем $v \equiv 0$. Общий случай неоднородных граничных условий сводится к рассматриваемому ниже вычитанием функции v из решения u так же, как это сделано при доказательстве теоремы 3.1. Таким образом, в дальнейшем предполагается, что $u \in \Theta_0(\Omega)$.

Для доказательства оценки (4.7) нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Существует срезающая функция* $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x) \geq 0$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

$$(4.8) \quad \begin{cases} 1. \quad \phi(x) = 1 \text{ при } |x - x_0| < R \ ; \ \phi(x) = 0 \text{ при } |x - x_0| \geq R + \varepsilon \\ 2. \quad |\nabla \phi(x)| \leq C\phi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \\ 3. \quad |\Delta \phi(x)| \leq C\phi^{2/r}(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Доказательство. Определим срезающую функцию $\theta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такую что $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(x) = 1$ при $x \in B_{x_0}^R$ и $\theta(x) = 0$ при $|x - x_0| > R + \varepsilon/2$. Пусть

$$\psi(t) = \begin{cases} t^\alpha & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

Здесь α – достаточно большое положительное число. Тогда, как нетрудно проверить, функция

$$\phi(x) = \theta(x) + (1 - \theta(x))\psi(R + \varepsilon - |x - x_0|)$$

удовлетворяет всем условиям леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $u \in \Theta_0(\Omega)$ *– решение задачи* (0.1) *и пусть* $w = \phi a u.u$. *Тогда функция*

$$\widehat{w} = \begin{cases} w & \text{при} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

принадлежит пространству $H^0_{1,l}(\mathbb{R}^n)$ *при* $l = \frac{2r}{r+2}$ *и удовлетворяет следующему уравнению:*

$$(4.9) \qquad \begin{cases} \Delta \widehat{w} = \widehat{h}_u(x) \\ \widehat{w}\big|_{B_{x_0}^{R+\varepsilon}} = 0 \end{cases}$$

Здесь и далее символ $\widehat{v}$ *означает продолжение функции* v *нулем при* $x \notin \Omega$, *а функция* $h_u(x)$ *вычисляется по следующей формуле:*

$$(4.10) \quad h_u(x) = 2\phi a \nabla u.\nabla u + 2\nabla\phi.\nabla(au.u) + \Delta\phi a u.u - \\ - 2\gamma \mathcal{D}u.u + 2\phi f(u,x).u + 2\phi g.u$$

Доказательство. Так как $u \in \Theta_0(\Omega)$, то $\widehat{u} \in \Theta(\mathbb{R}^n)$. Согласно неравенству Гельдера с показателями r/l и $2/l$,

$$\|\nabla\widehat{w}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,l}^l \leq C \int_{B_{x_0}^{R+\varepsilon}} |\widehat{u}|^l |\nabla\widehat{u}|^l \, dx \leq C_1(\|\widehat{u}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,r}\|\nabla\widehat{u}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,2})^l$$

Таким образом $\widehat{w} \in H_{1,k}^0(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ при $k = \min\{r/2, l\} = l$.

В дальнейшем, при доказательстве этой леммы мы будем обозначать символами $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ и $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_\Omega$ – скалярные произведения в пространствах $L_2(\mathbb{R}^n)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно.

Пусть $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned}(4.11) \quad \langle \Delta\widehat{w}, \Phi \rangle &= \langle \widehat{w}, \Delta\Phi \rangle = \langle w, \Delta\Phi \rangle_\Omega = -\langle \nabla w, \nabla\Phi \rangle_\Omega = \\ &= -\langle \nabla\phi\, au.u, \nabla\Phi \rangle_\Omega - \langle \phi\,\nabla(au.u), \nabla\Phi \rangle_\Omega = \\ &= \langle \Delta\phi\, au.u, \Phi \rangle_\Omega + \langle \nabla\phi.\nabla(au.u), \Phi \rangle_\Omega - \langle \phi\,\nabla(au.u), \nabla\Phi \rangle_\Omega\end{aligned}$$

При выводе формулы (4.11) мы несколько раз использовали формулу Грина

$$\langle \nabla U_1, U_2 \rangle_\Omega + \langle \nabla U_2, U_1 \rangle_\Omega = 0$$

с $U_1 \in W_{1,l}^0(\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon})$, $U_2 \in W_{1,l^*}(\Omega \cap B_{x_0}^{R+\varepsilon})$, $\frac{1}{l} + \frac{1}{l^*} = 1$ (см. [15]).

Преобразуем последнее слагаемое в формуле (4.11) следующим образом:

$$\begin{aligned}(4.12) \quad \langle \phi\,\nabla(au.u), \nabla\Phi \rangle_\Omega &= 2\,\langle a\nabla u, \nabla(\phi\, u\Phi) \rangle_\Omega - \\ &- 2\,\langle \phi\, a\nabla u.\nabla u, \Phi \rangle_\Omega - \langle \nabla\phi.\nabla(au.u), \Phi \rangle_\Omega\end{aligned}$$

Так как u – решение задачи (0.1) и $\phi\, u\Phi \in \Theta_0(B_{x_0}^{R+\varepsilon} \cap \Omega)$, то

$$(4.13) \quad -\langle a\nabla u, \nabla(\phi\, u\Phi) \rangle_\Omega + \langle \phi\gamma\mathcal{D}u.u, \Phi \rangle_\Omega - \langle \phi f(u,x).u, \Phi \rangle_\Omega = \langle \phi g.u, \Phi \rangle_\Omega$$

Заменяя последнее слагаемое в формуле (4.11) его выражением, полученным из равенств (4.12), (4.13), получим

$$\langle \Delta\widehat{w}, \Phi \rangle = \langle h_u, \Phi \rangle_\Omega = \langle \widehat{h}_u, \Phi \rangle$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Функция* $\widehat{h}_u \in H_{-1,l}(B_{x_0}^{R+\varepsilon}) \cap L_1(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ *и удовлетворяет следующей оценке:*

$$(4.14)\quad \widehat{h}_u(x) \geq -C(1+|\widehat{g}(x)|(\widehat{w}(x))^{1/2}) \equiv h(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Доказательство. Включение $\widehat{h}_u \in L_1(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ следует из формулы (4.10), а включение $\widehat{h}_u \in H_{-1,l}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ – из формулы (4.9) и утверждения леммы 2. Докажем оценку (4.14). Аналогично оценкам (3.7) – (3.12), используя (4.8), получаем

$$(4.15)\quad \begin{aligned} h_u(x) &\geq C(\phi|\nabla u|^2 + \phi|u|^r) - \\ &- C_1(\phi|\nabla u|\,|u| + |\nabla\phi|\,|\nabla u|\,|u| + |\Delta\phi|\,|u|^2 + 1 + \phi\,|g|\,|u|) \geq \\ &\geq C_0(\phi|\nabla u|^2 + \phi|u|^r) - C_2(1 + \,|g|\,(\phi au.u)^{1/2}) \geq -C_2(1 + \,|g|\,w^{1/2}) \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $h_i \in H_{-1,l}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$, $i = 1, 2$; $l > 1$ *и* $w_i \in H_{1,l}^0(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ – *решения следующих уравнений:*

$$\begin{cases} \Delta w_i = h_i \\ w_i\big|_{\partial B_{x_0}^{R+\varepsilon}} = 0 \end{cases}$$

соответственно. Пусть также

$$(4.16)\qquad \langle h_1, \Phi\rangle \geq \langle h_2, \Phi\rangle \quad \text{для любой } \Phi \in C_0^\infty(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$$

Тогда

$$(4.17)\qquad w_1(x) \leq w_2(x) \quad \text{для п.в. } x \in B_{x_0}^{R+\varepsilon}$$

Доказательство. Зададим оператор осреднения

$$\mathrm{S}_\delta : \mathcal{D}'(B_{x_0}^{R+\varepsilon}) \to C^\infty(B_{x_0}^{R+\varepsilon}), \quad 1 >> \delta > 0$$

следующей формулой:

$$(4.18)\quad \begin{aligned} (\mathrm{S}_\delta\, h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(|x-y|) h(\mathrm{T}_\delta\, y)\, dy \equiv \\ \equiv \det(\mathrm{T}_\delta)^{-1} \left\langle h(z), \phi_\delta(|x - \mathrm{T}_\delta^{-1}\, z|)\right\rangle_z \end{aligned}$$

Здесь $\mathrm{T}_\delta\, x \equiv x_0 + \frac{R+\varepsilon}{R+\varepsilon+2\delta}(x - x_0)$, а функция ϕ_δ определяется по формуле

$$\phi_\delta(|z|) = \frac{1}{\delta^n}\phi(|z|/\delta), \text{ где } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(\phi) \subset [-1,1],\ \int_{\mathbb{R}^n} \phi(|z|)\, dz = 1$$

Непосредственные вычисления показывают, что сопряженный оператор

$$(\mathrm{S}_\delta^* \varPhi)(z) = \det(\mathrm{T}_\delta)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(|x - \mathrm{T}_\delta^{-1} z|)\varPhi(x)\, dx \quad , \quad \langle \mathrm{S}_\delta\, h, \varPhi\rangle = \left\langle h, \mathrm{S}_\delta^* \varPhi \right\rangle$$

отображает $C_0^\infty(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ в $C_0^\infty(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ и для любой $\varPhi \in H_{1,p}^0(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$

$$\mathrm{S}_\delta^* \varPhi \to \varPhi \quad \text{при } \delta \to 0 \text{ в пространстве } H_{1,p}(B_{x_0}^{R+\varepsilon}), \quad 1 \le p \le \infty$$

Рассмотрим функцию $v = w_1 - w_2$, где w_1 и w_2 определены в условии леммы. Тогда

$$\varDelta v = h_1 - h_2 \qquad v\big|_{\partial B_{x_0}^{R+\varepsilon}} = 0$$

Пусть $h_\delta = \mathrm{S}_\delta(h_1 - h_2)$. Тогда $h_\delta \rightharpoondown h$ при $\delta \to 0$ в пространстве $H_{-1,l}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$. Действительно, для любой $\varPhi \in H_{1,l^*}^0(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$

$$|\langle \mathrm{S}_\delta\, h, \varPhi\rangle - \langle h, \varPhi\rangle| = |\left\langle h, \mathrm{S}_\delta^* \varPhi - \varPhi \right\rangle| \le \|h\|_{-1,l} \|\,\mathrm{S}_\delta^* \varPhi - \varPhi\|_{1,l^*} \to 0 \text{ при } \delta \to 0$$

Кроме того, из формул (4.16) и (4.18) следует, что $h_\delta \in C^\infty(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ и $h_\delta \ge 0$ при любом $\delta > 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\varDelta v_\delta = h_\delta \qquad v_\delta\big|_{\partial B_{x_0}^{R+\varepsilon}} = 0 \tag{4.19}$$

Согласно принципу максимума (см. [6]), $v_\delta(x) \le 0$, $\forall \delta > 0$ и $x \in B_{x_0}^{R+\varepsilon}$. Как известно (см. [18]), оператор Лапласа осуществляет изоморфизм между пространствами $H_{1,l}^0(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ и $H_{-1,l}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$. Таким образом,

$$v_\delta \rightharpoondown v \text{ в пространстве } H_{1,l}^0(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$$

Следовательно, $v \le 0$ почти всюду в $B_{x_0}^{R+\varepsilon}$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть известно, что функция $\widehat{w}$, определенная в лемме 2, принадлежит пространству $L_m(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ для некоторого $m \geq 1$. Тогда*

$$\widehat{w} \in L_{k(m)}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$$

и показатель $k(m)$ вычисляется по следующей формуле:

$$k(m) = \begin{cases} \frac{(2pn)m}{pn+2(n-2p)m} & \text{если} \quad pn + 2(n-2p)m > 0 \\ \infty & \text{если} \quad pn + 2(n-2p)m < 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

При этом справедлива оценка

$$\|\widehat{w}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,k(m)} \leq C \left\{ 1 + \|\widehat{g}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p} \left(\|\widehat{w}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,m} \right)^{1/2} \right\} \tag{4.21}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\Delta \widehat{w}_1 = \widehat{h}(x) \quad ; \quad \widehat{w}_1 \big|_{\partial B_{x_0}^{R+\varepsilon}} = 0$$

Здесь $h(x)$ определено формулой (4.14). Согласно леммам 3 и 4,

$$\widehat{w}(x) \leq \widehat{w}_1(x) \text{ для почти всех } x \in \Omega \tag{4.22}$$

Из неравенства Гельдера следует, что

$$\|h, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,s} \leq C(1 + \|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p} \|\widehat{w}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,m}^{1/2}) \qquad s = \frac{2pm}{p+2m} \tag{4.23}$$

Из теоремы об L_p–регулярности решений уравнения Лапласа (см.[18]) следует, что $\widehat{w}_1 \in W_{2,s}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$, а, согласно теореме вложения С.Л.Соболева (см. [17]), $W_{2,s} \subset\subset L_q$ при $\frac{1}{q} = \frac{1}{s} - \frac{2}{n}$, то есть $q = k(m)$. Таким образом, из оценки (4.22) и очевидного неравенства $\widehat{w} \geq 0$ следует оценка

$$\begin{aligned} \|\widehat{w}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,q} &\leq \|\widehat{w}_1, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,q} \leq C_1 \|\widehat{w}_1, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{2,s} \leq \\ &\leq C_2 \|\widehat{h}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,s} \leq C_3(1 + \|\widehat{g}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p} \|\widehat{w}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,m}^{1/2}) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Лемма 5 доказана.

Завершение доказательства теоремы 2. Из оценки (3.1) следует

$$\|\widehat{w}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,r/2} \leq C(1 + \|\widehat{g}, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p}^4)$$

Таким образом, все условия леммы 5 выполнены с $m = \frac{r}{2} > 1$. Рассмотрим последовательность $m_0 = \frac{r}{2}$, $m_{l+1} = k(m_l)$. Докажем, что $m_l = \infty$ для всех достаточно больших l. Действительно, из формулы (4.20) и условия $n - 2p < 0$ следует, что

$$m_{l+1} \geq 2m_l \text{ или } m_l \geq 2^{l-1}r$$

Подставляя эту оценку в формулу (4.20), получаем, что $m_l = \infty$ при

$$l > L = \log_2 \frac{pn}{r(2p-n)}$$

Для получения оценки (4.7) теперь достаточно проитерировать оценку (4.21) $[L] + 1$ раз. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Как показывает пример "острие Лебега" (см. [4]), пространство L_∞ в утверждении теоремы 2 не может быть заменено пространством $C(\overline{\Omega} \cap B_{x_0}^R)$ без дополнительных предположений относительно границы области Ω. Кроме того, так как в случае областей с нерегулярной границей вложение $W_{2,p} \subset L_\infty$, вообще говоря, не имеет места, то пространство $H_{2,p}$ в условии $(4.6')$ нельзя заменить пространством $W_{2,p}$.

Замечание 2. В случае невыполнения условия $p > \frac{n}{2}$, методом, изложенным выше, можно показать, что $u \in L_k(\Omega \cap B_{x_0}^R)$, где $k = \frac{pn}{n-2p}$ – показатель вложения $H_{2,p}$ в L_k в теореме С.Л.Соболева. Однако, для доказательства этого утверждения необходимо проитерировать оценку (4.24) бесконечное число раз.

Теорема 3. *Пусть $u \in \Theta(\Omega)$ – решение задачи (0.1), выполнены условия предыдущей теоремы и $B_{x_0}^{R+\varepsilon} \subset \Omega$. Тогда $u \in \left[H_{2,p}(B_{x_0}^R)\right]^k$ и справедлива следующая оценка:*

$$\|u, B_{x_0}^R\|_{2,p} \leq Q(\|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p}) \tag{4.25}$$

Здесь $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – некоторая монотонная функция, зависящая только от функции f и констант R и ε.

Доказательство. Согласно оценке (4.7) и условиям на нелинейность f,

$$\|f(u,x), B_{x_0}^R\|_{0,\infty} \le Q_1(\|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p}) \tag{4.26}$$

Для завершения доказательства теоремы нам понадобится еще одна лемма.

Лемма 6. *Предположим, что $u \in H_{1,m}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$ для некоторого $m > 1$. Тогда $u \in H_{1,q(m)}(B_{x_0}^R)$, где показатель $q(m)$ вычисляется по следующей формуле*

$$q(m) = \begin{cases} \min\{\frac{mn}{n-m}\ ;\ p\} & \textit{при} \quad n > m \\ p & \textit{при} \quad n \le m \end{cases} \tag{4.27}$$

и справедлива следующая оценка:

$$\|u, B_{x_0}^R\|_{1,q} \le C(\|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p} + \|u, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{1,m} + \|f(u,x), B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p}) \tag{4.28}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – срезающая функция, равная нулю вне $B_{x_0}^{R+\varepsilon}$ и единице при $x \in B_{x_0}^R$. Перепишем уравнение (0.1) в следующей форме

$$\begin{cases} \Delta(\varphi u) = h(x) \\ u\big|_{\partial B_{x_0}^{R+\varepsilon}} = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Здесь

$$h(x) = 2\sum_{i=1}^{k} \partial_i\varphi\partial_i u + \Delta\varphi u + a^{-1}\varphi\,\{f(u,x) + g - \gamma\mathcal{D}u\} \tag{4.30}$$

Согласно теореме об L_m–регулярности решений уравнения (4.29) и теореме вложения С.Л.Соболева,

$$\begin{aligned} \|u, B_{x_0}^R\|_{1,q} &\le C_0\|u, B_{x_0}^R\|_{2,m} \le \\ &\le C\|\varphi u, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{2,m} \le C_1\|h, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,m} \le \\ &\le C_2(\|g, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p} + \|u, B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{1,m} + \|f(u,x), B_{x_0}^{R+\varepsilon}\|_{0,p}) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Лемма 6 доказана.

Завершение доказательства теоремы 3. Зададим последовательность показателей $m_0 = 2$, $m_{l+1} = q(m_l)$. Тогда, как нетрудно видеть, $m_l = p$ при достаточно больших l. Действительно, из формулы (4.27) следует, что

$$m_{l+1} \geq \min\left\{p, m_l \frac{n}{n-m_l}\right\} \geq \min\left\{p, m_l \frac{n}{n-2}\right\}$$

Таким образом, $m_l = p$ при $l > L = \ln \frac{p}{2} \big/ \ln \frac{n}{n-2}$. Согласно оценке (3.1),

$$\|u, B^R_{x_0}\|_{1,2} \leq C(\|g, B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|^2_{0,p} + 1)$$

Итерируя оценку (4.28) $[L]+1$ раз (начав с $m_0 = 2$ и взяв $\frac{\varepsilon}{[L]+1}$ вместо ε), получим

$$\|u, B^R_{x_0}\|_{1,p} \leq C(\|g, B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|^2_{0,p} + \|f(u,x), B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|_{0,p}) \tag{4.32}$$

Применив теперь к уравнению (4.29) теорему об L_p–регулярности, аналогично формуле (4.31), получим

$$\|u, B^R_{x_0}\|_{2,p} \leq C_1(\|g, B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|^2_{0,p} + \|f(u,x), B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|_{0,p}) \tag{4.33}$$

Утверждение теоремы 2 следует теперь из оценок (4.33) и (4.26). Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Если граница $\partial\Omega \cap B^{R+\varepsilon}_{x_0}$ является достаточно гладким многообразием и краевое условие u_0 удовлетворяет условию (4.6′), то изложенным выше методом можно получить оценки, аналогичные (4.25) и для случая $x_0 \in \partial\Omega$.

§5 Ограниченность решений при $|x| \to \infty$.

В этом параграфе, в качестве следствий из оценок, полученных в параграфах 3 и 4, будет доказана ограниченность при $x \to \infty$ решений системы (0.1) в различных функциональных пространствах. Для этого нам понадобится несколько определений.

Определение 1. *Обозначим через $\Xi_b(\Omega)$ банахово пространство функций g из пространства $\Xi(\Omega)$, обладающих конечной нормой*

$$\|g\,; b\|_{\Xi} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|g, B^1_{x_0} \cap \Omega\|_{\Xi} < \infty \tag{5.1}$$

Аналогично, пространство $\mathcal{V}_b(\partial\Omega)$ определяется следующей нормой:

$$\|u_0\,;\,b\|_{\mathcal{V}_0} = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \|u_0, B^1_{x_0} \cap \partial\Omega\|_{\mathcal{V}_0} < \infty \tag{5.2}$$

а пространство $\Theta_b(\Omega)$ — следующей нормой:

$$\|u\,;\,b\|_{\Theta} = \|u, \Omega\,; b\|_{\Theta} = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \|u, B^1_{x_0} \cap \Omega\|_{\Theta} < \infty \tag{5.3}$$

Определение 2. *Пусть $1 \le p < \infty$, $l = 0, 1, 2$. Тогда символом $W_{l,p,b}(\Omega)$ обозначается банахово пространство функций $g \in W^{\rm loc}_{l,p}(\Omega)$, обладающих конечной нормой*

$$\|g\,;\,b\|_{l,p} = \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \|g, B^1_{x_0} \cap \Omega\|_{l,p} < \infty \tag{5.4}$$

Пространство $W_{0,p,b}$ мы будем обозначать также символом $L_{p,b}$

Теорема 1. *1. Пусть правая часть $g(x)$ уравнения (0.1) принадлежит пространству $\Xi_b(\Omega)$ и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Тогда любое решение u системы (0.1) принадлежит пространству $\Theta_b(\Omega_\varepsilon)$, где*

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \,:\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

и справедлива следующая оценка:

$$\|u, \Omega_\varepsilon\,; b\|_{\Theta} \le C_\varepsilon(1 + \|g, \Omega\,; b\|^2_{\Xi}) \tag{5.5}$$

2. Пусть, кроме того, краевое условие $u_0 \in \mathcal{V}_b(\partial\Omega)$. Тогда любое решение u системы (0.1) принадлежит пространству $\Theta_b(\Omega)$, и справедлива оценка

$$\|u, \Omega\,; b\|_{\Theta} \le C(1 + \|g\,;\,b\|^2_{\Xi} + \|u_0\,;\,b\|^r_{\mathcal{V}_0}) \tag{5.6}$$

Доказательство этой теоремы немедленно следует из оценки (3.1).

Теорема 2. *Предположим, что $a = a^*$ и правая часть $g \in L_{p,b}(\Omega)$ при некотором $p > n/2$. Тогда любое решение u системы (0.1) принадлежит пространству $W_{2,p,b}(\Omega_\varepsilon)$ для любого положительного ε, и справедлива следующая оценка:*

$$\|u, \Omega_\varepsilon\,; b\|_{2,p} \le Q_\varepsilon(\|g, \Omega\,; b\|_{0,p}) \tag{5.7}$$

Здесь $Q_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— некоторая монотонная функция.*

Доказательство этой теоремы немедленно следует из оценки (4.25).

Пример 1. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$, и выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда, согласно теореме 2 , любое решение u задачи (0.1) принадлежит пространству $W_{2,p,b}(\Omega)$ и, следовательно, пространству $C_b(\Omega)$. В частности, не существует решений задачи (0.1), удовлетворяющих условию

$$\limsup_{x\to\infty} |u(x)| = \infty$$

Пример 2. Пусть $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, $x = (t, x')$, и пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда, согласно теореме 2 и теореме вложения С.Л.Соболева, любое решение u задачи (0.1) допускает следующую оценку:

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}} |u(t,x')| = C(1/t, \|g\,;\,b\|_{0,p}) < \infty \quad ; \quad \forall t > 0 \tag{5.7}$$

Заметим, что никаких ограничений на рост $u_0(x')$ при $x' \to \infty$ не налагается.

Предположим теперь, что краевое условие $u_0 \in W^{\mathrm{loc}}_{2-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{n-1})$, и выполнено следующее условие ограниченности:

$$\|u_0, \mathbb{R}^{n-1}\,;\, b\|_{2-\frac{1}{p},p} < \infty$$

Тогда, согласно обратной теореме о следах (см. [18]), существует функция $v \in W_{2,p,b}(\Omega)$, такая что $v\big|_{\partial\Omega} = u_0$. Следовательно, согласно теореме 4.2 и замечанию 4.3 к теореме 4.3, любое решение задачи (0.1) принадлежит пространству $W_{2,p,b}(\Omega)$. В частности, любое решение задачи (0.1) принадлежит пространству $C_b(\Omega)$.

Определение 3. *Назовем локальным решением уравнения* (0.1) *функцию* u, *определенную в некотором шаре* $B^R_{x_0}$, *принадлежащую пространству* $\Theta(B^R_{x_0})$ *и удовлетворяющую уравнению* (0.1) *как равенству в пространстве* $\Xi(B^R_{x_0})$.

Заметим, что в доказательстве теорем 4.2 и 4.3 никак не используется тот факт, что решение u определено вне шара $B^{R+\varepsilon}_{x_0}$, то есть теоремы 4.1–4.3 справедливы и для локальных решений системы (0.1). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$, *такого что* $B^{R+\varepsilon}_{x_0} \subset \Omega$, *существует константа* K, *зависящая от* ε, R *и* $\|g\,;\,b\|_{0,p}$, *такая что никакое локальное решение* u, *определенное в шаре* $B^R_{x_0}$ *и удовлетворяющее условию*

$$\sup\nolimits_{x \in B^R_{x_0}} |u(x)| > K \tag{5.8}$$

не может быть продолжено до локального решения $\widehat{u}$ *в шаре* $B^{R+\varepsilon}_{x_0}$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\widehat{u} \in \Theta(B^{R+\varepsilon}_{x_0})$ и ее сужение на $B^R_{x_0}$ совпадает с u. Тогда, согласно теореме 4.3 и теореме вложения С.Л.Соболева ($W_{2,p}(B^R_{x_0}) \subset C(B^R_{x_0})$ при $p > n/2$),

$$\sup\nolimits_{x \in B^R_{x_0}} |u(x)| \le Q(\|g, B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|_{0,p}) \tag{5.9}$$

Оценка (5.9) противоречит условию (5.8) при $K > Q(\|g, B^{R+\varepsilon}_{x_0}\|_{0,p})$. Теорема 3 доказана.

Глава 2. Траекторный аттрактор.

В этой главе построен траекторный аттрактор $\mathcal{A}$ нелинейной системы (0.1) в неограниченной области, удовлетворяющей условию (0.5). Кроме того, исследована его зависимость от выбора области Ω и направления $\vec{l}$, а также сформулированы условия, при выполнении которых аттрактор $\mathcal{A}$ обладает большей гладкостью ($\mathcal{A} \subset H_{2,p}$, $p > \frac{n}{2}$).

Для простоты мы сначала ограничимся рассмотрением частного случая уравнения (0.1), когда нелинейная функция $f(u,x) \equiv f(u)$ не зависит от x

$$\begin{cases} a\Delta u + \gamma \mathcal{D} u - f(u) = g(x) \\ u|_{\partial\Omega} = u_0 \end{cases} \tag{6.0}$$

Формулировки основных результатов для уравнения (0.1) в общем случае приведены в §10.

В параграфе 6, на примере уравнения (6.0), кратко излагается абстрактная схема построения траекторного аттрактора, условия, гарантирующие его существование, и теоремы, описывающие его структуру. Подробное изложение этих вопросов дано в [26] и [27].

Параграф 7 посвящен доказательству существования траекторного аттрактора нелинейной системы (6.0).

В параграфе 8 получен ряд следствий из теоремы о существовании траекторного аттрактора системы (6.0), доказанной в параграфе 7. В частности, исследована зависимость построенного аттрактора от выбора области Ω и направления $\vec{l}$.

Параграф 9 посвящен исследованию вопросов, связанных с гладкостью аттрактора и притяжению к нему в более сильной топологии.

Примеры эллиптических систем вида (0.1), обладающих траекторными аттракторами, приведены в §11.

§6 *Основные понятия.*

В этом параграфе мы, на примере системы (6.0), кратко изложим основные понятия и определения, связанные с абстрактной схемой построения траекторного аттрактора динамической системы.

Всюду в дальнейшем предполагается, что область Ω удовлетворяет условиям (0.5) с некоторым выделенным направлением $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$. Условие (0.5) позволяет определить действие полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$ в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ по следующей очевидной формуле:

$$T_s\varphi(x) = \varphi(T_{-s}x) = \varphi(x - s\vec{l})$$

Действительно, из пункта 1 условий (0.5) следует

$$\operatorname{supp} T_s\varphi = T_s \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega \quad , \quad s \geq 0$$

И следовательно, $T_s : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ при $s \geq 0$. Таким образом, формула

$$\langle T_s u, \varphi \rangle = \langle u, T_s\varphi \rangle \quad ; \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

определяет действие полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$, а значит, и в пространствах $\Theta(\Omega)$ и $\Xi(\Omega)$, введенных в §1. В частности, на регулярных функциях из $\mathcal{D}'(\Omega)$, $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, действие полугруппы T_s задается обычной формулой

$$T_s u(x) = u(T_s x) = u(x + s\vec{l}) \quad ; \quad s \geq 0$$

Напомним, что всюду в дальнейшем (в §§6–9) предполагается, что нелинейная функция f не зависит от x

$$f(u,x) \equiv f(u) \tag{6.1}$$

Для построения траекторного аттрактора системы (6.0), наряду с исходным уравнением, рассматривается следующее семейство уравнений вида (6.0):

$$\begin{cases} a\Delta u + \gamma \mathcal{D} u - f(u) = \sigma(x) \\ \sigma(\cdot) \in \Sigma \end{cases} \tag{6.2}$$

Здесь $\Sigma \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ – инвариантно относительно полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$ положительных сдвигов вдоль оси $\vec{l}$, то есть

$$T_s \Sigma \subset \Sigma \quad ; \quad s \geq 0 \tag{6.3}$$

Кроме этого, предполагается, что Σ — компактное подмножество некоторого функционального пространства $\Xi^+ \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, в качестве которого в дальнейшем используется пространство $\Xi^w(\Omega)$, то есть пространство $\Xi(\Omega)$, наделенное слабой топологией.

Замечание 1. В приложениях в качестве множества Σ обычно рассматривается оболочка $\mathcal{H}^+(g)$ правой части исходного уравнения (6.0), то есть замыкание в пространстве Ξ^+ множества $\{T_s g, s \geq 0\}$ всех положительных сдвигов трансляционно–компактной функции g вдоль направления $\vec{l}$ (см. §8).

Множество Σ мы будем называть в дальнейшем пространством символов, а его элементы — символами семейства (6.2).

Определение 1. *Множество всех решений $u \in \Theta(\Omega)$ уравнения* (6.2) *с заданной правой частью $\sigma \in \Sigma$ и произвольными $u_0 \in \mathcal{V}_0(\partial\Omega)$ обозначим через K_σ^+ .*

Нетрудно проверить, что семейство множеств $\{K_\sigma^+, \sigma \in \Sigma\}$ обладает следующим свойством трансляционной согласованности (см. [26]):

$$T_s K_\sigma^+ \subset K_{T_s\sigma}^+ \subset \Theta(\Omega) \tag{6.4}$$

Таким образом, полугруппа $\{T_s, s \geq 0\}$ действует на траекторном пространстве K_Σ^+ семейства (6.2)

$$K_\Sigma^+ = \cup_{\sigma\in\Sigma} K_\sigma^+ \subset \Theta(\Omega) \ ; \quad T_s K_\Sigma^+ \subset K_\Sigma^+ \tag{6.5}$$

Наделим множество K_Σ^+ индуцированной вложением $K_\Sigma^+ \subset \Theta^+ \equiv \Theta^w(\Omega)$ топологией.

Определение 2. *Множество $\mathcal{B} \subset K_\Sigma^+$ называется притягивающим множеством полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$ в K_Σ^+, если выполнено следующее условие: для любой окрестности $\mathcal{Q}(\mathcal{B})$ множества $\mathcal{B}$ в пространстве K_Σ^+ существует $S = S(\mathcal{Q}(\mathcal{B}))$, такое что*

$$T_s(K_\Sigma^+) \subset \mathcal{Q}(\mathcal{B}) \quad ; \quad \forall s \geq S \tag{6.6}$$

Замечание 2. Определение притягивающего множества, данное выше, немного отличается от традиционного (см. [1], [29], [33]). Обычно требуют выполнения условия (6.6) лишь для ограниченных (в каком-то смысле) подмножеств пространства K_Σ^+. Однако, как будет показано в §7, благодаря оценке (3.1), для полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$, отвечающей семейству (6.2), условие притяжения выполняется для всех подмножеств пространства K_Σ^+ с одной и той же константой $S = S(\mathcal{Q}(\mathcal{B}))$.

Определение 3. *Множество $\mathcal{A}_\Sigma \subset K_\Sigma^+$ называется траекторным аттрактором семейства (6.2), если выполнены следующие условия:*

(1) *Множество $\mathcal{A}_\Sigma$ — компакт в пространстве Θ^+.*

(2) *Множество $\mathcal{A}_\Sigma$ строго инвариантно относительно $\{T_s, s \geq 0\}$*

$$T_s\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma \quad ; \quad s \geq 0$$

(3) *$\mathcal{A}_\Sigma$ – притягивающее множество полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$ в K_Σ^+.*

Для формулировки основной теоремы о существовании траекторного аттрактора нам понадобится еще 2 определения.

Определение 4. *Обозначим через $\omega(\Sigma)$ ω–предельное множество (аттрактор) полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$, действующей в пространстве Σ. Так как Σ – компакт в Ξ^+, то $\omega(\Sigma)$ существует и задается следующей формулой (см. [1]):*

$$\omega(\Sigma) = \bigcap\nolimits_{s\geq 0} \left[\bigcup\nolimits_{h\geq s} T_h\Sigma\right]_{\Xi^+} \tag{6.7}$$

Здесь $[\ \cdot\ ]_{\Xi^+}$ обозначает замыкание в топологии пространства Ξ^+.

Определение 5. *Будем говорить, что семейство множеств $\{K_\sigma^+, \sigma \in \Sigma\}$ является замкнутым ((Θ^+, Σ) – секвенциально замкнутым), если его график $\cup_{\sigma\in\Sigma} K_\sigma^+ \times \{\sigma\}$ секвенциально замкнут в пространстве $\Theta^+ \times \Sigma$. В случае компактного пространства символов Σ это свойство эквивалентно секвенциальной замкнутости K_Σ^+ в Θ^+ (см. [26], [27]).*

Теорема 1 [26], [27]. *Предположим, что полугруппа* $\{T_s, s \geq 0\}$ *и семейство* $\{K_\sigma^+ \ , \sigma \in \Sigma\}$, *определенные выше, удовлетворяют следующим условиям:*

(1) *Семейство множеств* $\{K_\sigma^+, \sigma \in \Sigma\}$ *является замкнутым.*
(2) *Полугруппа* $\{T_s, s \geq 0\}$ *обладает в* K_Σ^+ *компактным притягивающим множеством.*

Тогда семейство (6.2) *обладает траекторным аттрактором* $\mathcal{A}_\Sigma$, *причем*

$$(6.8)\qquad \mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_{\omega(\Sigma)} = \bigcap\nolimits_{s\geq 0}\left[\bigcup\nolimits_{h\geq s} T_h K_\Sigma^+\right]_{\Theta^+}$$

Здесь $\mathcal{A}_{\omega(\Sigma)}$ – *траекторный аттрактор семейства* (6.2) *с пространством символов* $\omega(\Sigma)$, *а квадратные скобки означают замыкание в пространстве* $\Theta^w(\Omega)$.

Справедливость условий 1 и 2 будет проверена в следующем параграфе.

Сформулируем теперь теорему, описывающую структуру траекторного аттрактора полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$. Для этого нам понадобится еще несколько определений и вспомогательных утверждений.

Определение 6.
1. Обозначим символом $\Xi_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$ *пространство Фреше, выделяемое из пространства* $\Xi(\Omega)$ *следующей системой полунорм:*

$$(6.8)\quad \|g\,; x_0, b^+(l)\|_\Xi = \sup\nolimits_{s\geq 0} \|g, \Omega \cap T_s B^1_{x_0}\|_\Xi = C(x_0) < \infty\ ;\ x_0 \in \mathbb{R}^n$$

2. Обозначим через $\Xi_{b(\vec{l})}(\Omega)$ *пространство Фреше, выделяемое из пространства* $\Xi(\Omega)$ *следующей системой полунорм:*

$$(6.9)\quad \|g\,; x_0, b(l)\|_\Xi = \sup\nolimits_{s\in\mathbb{R}} \|g, \Omega \cap T_s B^1_{x_0}\|_\Xi = C(x_0) < \infty\ ;\ x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Аналогичным образом определяются пространства $\Theta_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$ *и* $\Theta_{b(\vec{l})}(\Omega)$ *и соответствующие им полунормы* $\|u\,; x_0, b^+(l)\|_\Theta$ *и* $\|u\,; x_0, b(l)\|_\Theta$.

Лемма 1. *Множество* $\Sigma \subset \Xi(\Omega)$, *удовлетворяющее условию* (6.3), *является предкомпактным в* Ξ^+ *тогда и только тогда, когда* Σ *ограничено в пространстве* $\Xi_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$. *Аналогичное утверждение имеет место и для пространств* Θ.

Доказательство. Согласно следствию 1.3, множество Σ предкомпактно в Ξ^+ тогда и только тогда, когда оно ограничено в $\Xi(\Omega)$. Покажем, что из ограниченности в $\Xi(\Omega)$ и условия (6.3) следует ограниченность Σ в пространстве $\Xi_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$. Пусть $B^1_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда, согласно лемме 7.1, существует $s_0 = s_0(x_0)$, такое что $T_{s_0} B^1_{x_0} \subset \Omega$. Согласно определению 6 и условию (6.3),

$$\|\Sigma\,;\,x_0, b^+(l)\|_\Xi = \sup\nolimits_{s\ge 0} \|\Sigma, \Omega \cap T_s B^1_{x_0}\|_\Xi \le$$
$$\le \sup\nolimits_{s<s_0} \|\Sigma, \Omega \cap T_s B^1_{x_0}\|_\Xi + \sup\nolimits_{s\ge 0} \|\Sigma, T_s T_{s_0} B^1_{x_0}\|_\Xi \le$$
$$\le \|\Sigma, \Omega \cap B^{s_0}_{x_0}\|_\Xi + \sup\nolimits_{s\ge 0} \|T_s\Sigma, T_{s_0} B^1_{x_0}\|_\Xi \le C(x_0) + \|\Sigma, T_{s_0} B^1_{x_0}\|_\Xi < \infty$$

Лемма 1 доказана.

Определение 7. *Функция $\widehat{\xi}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\xi} \in C(\mathbb{R}, \Sigma)$ называется полным символом полугруппы $\{T_s, s \ge 0\}$, действующей в пространстве Σ, если выполнено следующее условие:*

$$T_s \widehat{\xi}(t) = \widehat{\xi}(t+s) \;\;;\;\; s \ge 0 \;\;;\;\; t \in \mathbb{R} \tag{6.10}$$

Множество всех *полных символов полугруппы $\{T_s, s \ge 0\}$, действующей в пространстве Σ, обозначим через $\mathcal{Z}(\Sigma)$.*

Лемма 2 [26]**.**

$$\omega(\Sigma) = \{\widehat{\xi}(0) \,:\, \widehat{\xi} \in \mathcal{Z}(\Sigma)\}$$

Таким образом, для любого символа $\sigma \in \omega(\Sigma)$ существует хотя бы один полный символ $\widehat{\xi}(t) \in \mathcal{Z}(\Sigma)$, такой что $\widehat{\xi}(0) = \sigma$.

Лемма 3. *Для любого полного символа $\widehat{\xi} \in \mathcal{Z}(\Sigma)$ существует единственная функция $\xi \in \Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$, такая что*

$$\widehat{\xi}(s)(x) = \xi(x + s\vec{l})\big|_\Omega \;\;;\;\; s \in \mathbb{R} \;\;;\;\; x \in \Omega \tag{6.11}$$

Замечание 3. Так как $\xi \in \Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$ не является, вообще говоря, регулярной обобщенной функцией, то более точная формулировка (6.11) следующая:

$$\left\langle \widehat{\xi}(s), \varphi \right\rangle = \langle \xi, T_s\varphi \rangle \;\;;\;\; \varphi \in D(\Omega) \quad s \in \mathbb{R} \tag{6.12}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\xi} \in \mathcal{Z}(\Sigma)$ и $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Тогда, из пункта 2 условий (0.5) следует (см. лемму 7.1), что существует $s \ge 0$, такое что

$T_s \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, а следовательно, $T_s\varphi \in D(\Omega)$. Определим обобщенную функцию $\xi \in D'(\mathbb{R}^n)$ по следующей формуле:

$$\langle \xi, \varphi \rangle \equiv \left\langle \widehat{\xi}(-s), T_s\varphi \right\rangle \tag{6.13}$$

Проверим корректность этого определения. Пусть s_1 и s_2 такие, что $s_2 > s_1 \geq 0$ и $T_{s_1}\varphi \in D(\Omega)$, $T_{s_2}\varphi \in D(\Omega)$. Тогда

$$\left\langle \widehat{\xi}(-s_2), T_{s_2}\varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{\xi}(-s_2), T_{s_2-s_1}T_{s_1}\varphi \right\rangle =$$
$$= \left\langle T_{s_2-s_1}\widehat{\xi}(-s_2), T_{s_1}\varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{\xi}(-s_1), T_{s_1}\varphi \right\rangle$$

Проверим выполнение формулы (6.12). Пусть $s \geq 0$. Тогда для любой $\varphi \in D(\Omega)$

$$\left\langle \widehat{\xi}(s), \varphi \right\rangle = \left\langle T_s\widehat{\xi}(0), \varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{\xi}(0), T_s\varphi \right\rangle = \langle \xi, T_s\varphi \rangle$$
$$\left\langle \widehat{\xi}(-s), \varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{\xi}(-s), T_sT_{-s}\varphi \right\rangle = \langle \xi, T_{-s}\varphi \rangle$$

Докажем, что $\xi \in \Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $B^1_{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Тогда из леммы 7.1 следует, что существует $s_0 = s_0(x_0) \in \mathbb{R}_+$, такое что $T_{s_0}B^1_{x_0} \in \Omega$. Согласно определению 6, формуле (6.13) и компактности множества Σ,

(6.13′)

$$\|\xi, \mathbb{R}^n\,;\, x_0, b(l)\|_\Xi = \sup\nolimits_{s\in\mathbb{R}} \|\xi, T_sB^1_{x_0}\|_\Xi = \sup\nolimits_{s\in\mathbb{R}} \|\xi, T_{s-s_0}T_{s_0}B^1_{x_0}\|_\Xi =$$
$$= \sup\nolimits_{s\in\mathbb{R}} \|\widehat{\xi}(s-s_0), T_{s_0}B^1_{x_0}\|_\Xi \leq \|\Sigma, T_{s_0}B^1_{x_0}\|_\Xi < \infty$$

Лемма 3 доказана.

В дальнейшем, всюду, где это не приводит к путанице, мы отождествляем полный символ $\widehat{\xi}$ и соответствующую ему функцию $\xi \in \Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$

Следствие 1. *Множество $\mathcal{Z}(\Sigma)$ ограничено в пространстве $\Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$, строго инвариантно относительно действия группы $\{T_s, s \in \mathbb{R}\}$, то есть*

$$T_s\mathcal{Z}(\Sigma) = \mathcal{Z}(\Sigma)$$

и компактно в пространстве $\Xi^w(\mathbb{R}^n)$.

Действительно, ограниченность в пространстве $\Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$ следует из оценки (6.13′), а предкомпактность в пространстве $\Xi^w(\mathbb{R}^n)$ – из следствия 1.3. Замкнутость и строгая инвариантность множества $\mathcal{Z}(\Sigma)$ следует из определения полного символа, леммы 2 и аналогичных свойств множества $\omega(\Sigma)$.

Определение 8. *Функция $\widehat{u}(s)$, $\widehat{u} \in C(\mathbb{R}, K_{\Sigma}^{+})$ называется полной траекторией полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$, соответствующей полному символу $\widehat{\xi}$, если выполнены следующие условия:*

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
1. & T_s\widehat{u}(t) = \widehat{u}(t+s) \quad ; \quad s \geq 0 \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\
2. & \widehat{u}(s) \in K_{\widehat{\xi}(s)}^{+} \qquad s \in \mathbb{R}
\end{array}
\right.
\tag{6.14}
$$

Множество всех *полных траекторий, соответствующих полному символу $\widehat{\xi}$, обозначим через K_{ξ}.*

Лемма 4. *Для любой полной траектории $\widehat{u} \in K_{\xi}$ существует единственная функция $u \in \Theta_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая уравнению*

$$
a\Delta u + \gamma \mathcal{D} u - f(u) = \xi(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n
$$

такая что

$$
\widehat{u}(t)(x) = u(x + t\vec{l})\big|_{\Omega}
$$

Доказательство этой леммы проводится совершенно аналогично доказательству леммы 3.

Теорема 2 [27]**.** *Траекторный аттрактор $\mathcal{A}_{\Sigma}$ обладает следующей структурой:*

$$
\mathcal{A}_{\Sigma} = \mathcal{A}_{\omega(\Sigma)} = \cup_{\xi \in \mathcal{Z}(\Sigma)} \{\widehat{u}(0) \ ; \ u \in K_{\xi}\}
$$

§7 *Траекторный аттрактор нелинейной эллиптической системы*

В этом параграфе мы проверим справедливость условий теоремы 6.1 для семейства (6.2) и, тем самым, докажем существование траекторного аттрактора у этого семейства.

Теорема 1. *Семейство $\{K_{\sigma}^{+}, \sigma \in \Sigma\}$, соответствующее семейству уравнений* (6.2)*, является замкнутым.*

Доказательство. Пусть $u_n \in K_{\sigma_n}^{+}$, $u_n \to u$ в Θ^{+} и $\sigma_n \to \sigma$ в Ξ^{+}. Нужно проверить, что $u \in K_{\sigma}^{+}$. Другими словами, нужно доказать, что функция u является решением уравнения (6.2) с правой частью $\sigma(x)$. Согласно определению решения задачи (6.2),

$$
-\langle a\nabla u_n, \nabla \Phi\rangle + \langle \gamma \mathcal{D} u_n, \Phi\rangle - \langle f(u_n), \Phi\rangle = \langle \sigma_n, \Phi\rangle \quad ; \quad \forall \Phi \in D(\Omega)
\tag{7.1}
$$

Выполняя предельный переход $n \to \infty$ в уравнении (7.1) так же, как и при доказательстве теоремы 2.2, получим

$$(7.2) \qquad -\langle a\nabla u, \nabla\Phi\rangle + \langle\gamma\mathcal{D}u, \Phi\rangle - \langle f(u), \Phi\rangle = \langle\sigma, \Phi\rangle \quad ; \quad \forall\Phi \in D(\Omega)$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Множество K_Σ^+ является секвенциально замкнутым подпространством пространства Θ^+ .*

Теорема 2. *Полугруппа $\{T_s, s \geq 0\}$, соответствующая семейству уравнений (6.2), обладает в пространстве K_Σ^+ компактным притягивающим множеством $\mathcal{B}$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого $B_{x_0}^R \subset \mathbb{R}^n$ выполнено следующее условие:*

$$(7.3) \qquad \lim_{s\to+\infty} d(T_s B_{x_0}^R, \partial\Omega) = \infty$$

В частности, существует s_0, такое что $T_s B_{x_0}^R \subset \Omega$ для любого $s \geq s_0$.

Доказательство. Докажем сначала вторую часть утверждения леммы. Так как $\overline{B_{x_0}^R} \subset \mathbb{R}^n = \cup_{s>0} T_{-s}\Omega$, то для любого $x \in \overline{B_{x_0}^R}$ существует открытая окрестность U_x и число $s_x \geq 0$, такие что $U_x \subset T_{-s_x}\Omega$. Выберем из покрытия $\{U_x, x \in \overline{B_{x_0}^R}\}$ конечное подпокрытие $\{U_{x_i}, i = 1..N\}$. Тогда, согласно пункту 1 условий (0.5), $B_{x_0}^R \subset T_{-s}\Omega$ при

$$s \geq s(B_{x_0}^R) = \max\{s_{x_i}, i = 1..N\}$$

Таким образом,

$$(7.4) \qquad T_s B_{x_0}^R \subset \Omega \quad ; \quad s \geq s(B_{x_0}^R)$$

Так как $T_{s_1}\Omega \subset T_{s_2}\Omega$ при $s_2 \geq s_1$, то функция $s \to d(T_s B_{x_0}^R, \Omega)$ является монотонной (неубывающей), поэтому предел (7.3) существует. Докажем, что он равен ∞. Предположим противное:

$$d(T_s B_{x_0}^R, \Omega) < L \quad ; \quad \forall s \geq 0$$

Тогда $T_s B_{x_0}^{R+L} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, $s \in \mathbb{R}_+$, что противоречит условию (7.4) (с заменой R на $R+L$). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1 следует, что для любого шара $B_{x_0}^R \subset \mathbb{R}^n$ существует $S = S(B_{x_0}^R)$, такое что

$$T_s B_{x_0}^{2R} \subset \Omega \;\; \text{для любого } s \geq S$$

Так как Σ – компакт в пространстве Θ^+, то, согласно лемме 6.1,

$$\|\Sigma\,;\, x_0, R, b^+(l)\|_\Xi \equiv \sup_{s\geq 0} \|\Sigma, \Omega \cap T_s B_{x_0}^R\|_\Xi = C(x_0, R) < \infty$$

Таким образом, согласно оценке (3.1) с $\varepsilon = R$, при $s \geq S$ выполнено следующее неравенство:

$$(7.5) \quad \|T_s K_\Sigma^+\,, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_\Theta = \|K_\Sigma^+\,, T_s(\Omega \cap B_{x_0}^R)\|_\Theta \leq \|K_\Sigma^+\,, T_s B_{x_0}^R\|_\Theta \leq$$
$$\leq C_R(1 + \|\Sigma, T_s B_{x_0}^{2R}\|_\Xi^2) \leq \mathrm{C}_R(1 + \|\Sigma\,; x_0, 2R, b^+\|_\Xi^2) \equiv M(x_0, R) < \infty$$

Определим множество $\mathcal{B}_0 \subset \Theta_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$, следующей системой неравенств:

$$(7.6) \qquad \|\mathcal{B}_0\,, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_\Theta \leq M(x_0, R)\ ;\ x_0 \in \mathbb{R}^n\ ;\ R \in \mathbb{R}_+$$

Согласно лемме 6.1, множество $\mathcal{B}_0$ – предкомпакт в пространстве Θ^+. Очевидно, что множество $\mathcal{B}_0$ является выпуклым замкнутым подмножеством пространства $\Theta(\Omega)$, а следовательно (см. лемму 1.4), замкнуто и в топологии пространства Θ^+. Таким образом, согласно следствию 1.3, множество $\mathcal{B}_0$, наделенное индуцированной из Θ^+ топологией, является компактным метрическим пространством. Определим множество $\mathcal{B} \subset K_\Sigma^+$ следующей формулой:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cap K_\Sigma^+$$

Так как $\mathcal{B}_0$ – метрический компакт, и множество K_Σ^+ секвенциально замкнуто, то множество $\mathcal{B}$ является компактным в пространстве K_Σ^+ . Докажем свойство притяжения. Пусть $\mathcal{Q}$ – окрестность множества $\mathcal{B}$ в пространстве Θ^+. Тогда, из компактности $\mathcal{B}$ следует, что $\mathcal{Q}$ содержит окрестность $\mathcal{Q}_N$ вида

$$(7.7) \qquad \mathcal{B} \subset \mathcal{Q}_N = \cup_{i=1}^N \{u_i + E_i\}\ \ ;\ \ u_i \in \mathcal{B}$$

Здесь множества E_i принадлежат базе окрестностей нуля пространства Θ^+ . Согласно определению слабой топологии в пространстве $\Theta(\Omega)$ и теореме 1.1, всякое E_i представляется в виде

$$
\begin{aligned}
(7.8) \quad & E_i = E_i(R_i, \varepsilon_i\,;\, L_1^i, \cdots, L_{n_i}^i) = \\
& = \Big\{ u \in \Theta^+ \,:\, \Big| \Big\langle L_j^i, u\big|_{\Omega \cap B_0^{R_i}} \Big\rangle \Big| < \varepsilon_i\,;\, j = 1..n_i\,,\, L_j^i \in \Theta(\Omega\,,\, B_0^{R_i})^* \Big\}
\end{aligned}
$$

Пусть $R = \max\{R_i\,;\, i = 1..N\}$. Тогда

$$
\mathcal{Q}(R) \equiv \{u \in \Theta^+\,;\; u\big|_{\Omega \cap B_0^R} \in \mathcal{B}\big|_{\Omega \cap B_0^R}\} \subset \mathcal{Q}_N \subset \mathcal{Q}
$$

Таким образом, достаточно проверить, что

$$
T_s K_\Sigma^+\,\big|_{\Omega \cap B_0^R} \subset \mathcal{B}\big|_{\Omega \cap B_0^R}
$$

для достаточно больших $s \geq 0$. Однако последнее утверждение немедленно следует из оценки (7.5) и определения множества $\mathcal{B}$. Теорема 2 доказана.

Таким образом, все условия теоремы 6.1 выполнены, и следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Семейство уравнений* (6.2) *обладает в пространстве* Θ^+ *траекторным аттрактором* $\mathcal{A}_\Sigma$, *который состоит из сужений на область* Ω *всех решений* $u \in \Theta_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$ *следующего семейства уравнений:*

$$
(7.9) \qquad \begin{cases} a\Delta u(x) + \gamma \mathcal{D} u(x) - f(u(x)) = \xi(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \xi \in \mathcal{Z}(\Sigma) \end{cases}
$$

Замечание 1. Так как, согласно лемме 6.3, $\mathcal{Z}(\Sigma) \subset \Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$, то, согласно оценке (3.1) с $\Omega = \mathbb{R}^n$, любое решение $u \in \Theta(\mathbb{R}^n)$ уравнения (7.9) принадлежит пространству $\Theta_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$.

Опишем теперь характер притяжения к аттрактору $\mathcal{A}_\Sigma$.

Следствие 2. *Из доказательства теоремы 2 следует, что для компактного множества* $\mathcal{A}$ *свойство притяжения эквивалентно следующему: для любого шара* $B_{x_0}^R \subset \Omega$ *множество* $\mathcal{A}\big|_{B_{x_0}^R}$ *является притягивающим для* *семейства множеств* $\{T_s K^+_\Sigma\,\big|_{B^R_{x_0}}\,;\ s\in\mathbb{R}_+\}$ *при* $s\to\infty$ *в топологии пространства* $\Theta^w(B^R_{x_0})$, *то есть для любой окрестности* $\mathcal{O}(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}})$ *множества* $\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}$ *в топологии пространства* $\Theta^w(B^R_{x_0})$ *существует* $S=S(\mathcal{O})$, *такое что*

$$(T_s K^+_\Sigma\,)\big|_{B^R_{x_0}}\subset\mathcal{O}(\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}})\ \text{ при }\ s\geq S$$

Так как вложения

$$(7.10)\qquad \begin{cases}\Theta(B^R_{x_0})\subset\subset H_{1-\varepsilon,2}(B^R_{x_0})\\ \Theta(B^R_{x_0})\subset\subset L_{r-\varepsilon}(B^R_{x_0})\end{cases}$$

компактны для любого $\varepsilon>0$, *то из теоремы 7.3 следует, что для любого шара* $B^R_{x_0}\subset\Omega$ *выполнены следующие условия:*

$$(7.11)\qquad \begin{cases}\lim_{s\to+\infty}\operatorname{dist}_{H_{1-\varepsilon,2}(B^R_{x_0})}\{T_s K^+_\Sigma\,\big|_{B^R_{x_0}}\,,\,\mathcal{A}_\Sigma\big|_{B^R_{x_0}}\}=0\\ \lim_{s\to+\infty}\operatorname{dist}_{L_{r-\varepsilon}(B^R_{x_0})}\{T_s K^+_\Sigma\,\big|_{B^R_{x_0}}\,,\,\mathcal{A}_\Sigma\big|_{B^R_{x_0}}\}=0\end{cases}$$

Здесь

$$(7.12)\qquad \operatorname{dist}_{\dots}\{X,Y\}=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\|x-y\|_{\dots}$$

§8 *Следствия из основной теоремы о существовании аттрактора.*

В этом параграфе приведен ряд следствий из теоремы 7.3 и рассмотрены некоторые приложения. Кроме этого, исследована зависимость траекторного аттрактора от области Ω и выделенного направления $\vec{l}$.

Прежде всего, конкретизируем выбор пространства символов Σ семейства уравнений (6.2).

Лемма 1. *Пусть* Σ *компактное подмножество в* Ξ^+, *инвариантное относительно полугруппы* $\{T_s\,,s\geq 0\}$ *и пусть* $g\in\Sigma$. *Тогда оболочка функции* g

$$(8.1)\qquad \mathcal{H}^+(g)=[T_s g, s\geq 0]_{\Xi^+}\subset\subset\Xi^+$$

компактна в пространстве Ξ^+.

Доказательство леммы сразу следует из вложения $\mathcal{H}^+(g)\subset\Sigma$.

Определение 1. *Функцию $g \in \Xi^+$ назовем трансляционно компактной (в направлении $\vec{l}$) в Ξ^+, если выполнено условие* (8.1). *Аналогично определяется трансляционная компактность в Θ^+ и других функциональных пространствах, инвариантных относительно действия полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$* .

Очевидно, что множество $\mathcal{H}^+(g)$ трансляционно инвариантно, то есть

$$T_s\mathcal{H}^+(g) \subset \mathcal{H}^+(g) \ , \ s \geq 0 \tag{8.2}$$

Следовательно, множество $\mathcal{H}^+(g)$ может быть выбрано в качестве пространства символов Σ семейства (6.2), если g трансляционно компактна в Ξ^+.

Замечание 1. Очевидно, что в случае трансляционно компактной g множество $\mathcal{H}^+(g)$ является минимальным множеством, содержащим g, которое может быть выбрано в качестве пространства символов семейства (6.2)

Замечание 2. Так как оболочка $\mathcal{H}^+(g)$ трансляционно компактной функции g является метрическим компактом в пространстве Ξ^+, то множества $\mathcal{H}^+(g)$ и $\omega(g) \equiv \omega(\mathcal{H}^+(g))$ могут быть представлены в следующем виде (см.[27]):

$$\begin{cases} \mathcal{H}^+(g) = \{T_s g \ : \ s \geq 0\} \cup \omega(g) \\ \omega(g) = \{\xi \in \Xi^+ \ : \ \exists s_n \geq 0, s_n \to \infty \,\text{при}\, n \to \infty, \xi = \lim\limits_{n\to\infty} T_{s_n} g\} \end{cases} \tag{8.2$'$}$$

Здесь символ lim обозначает предел в топологии пространства Ξ^+.

Определение 2. *Траекторным аттрактором $\mathcal{A}_g$* уравнения (6.0) *с правой частью g, трансляционно компактной в пространстве Ξ^+, называется траекторный аттрактор $\mathcal{A}_\Sigma$ семейства* (6.2) *с пространством символов $\Sigma = \mathcal{H}^+(g)$.*

Напомним, что, согласно лемме 6.1, функция $g \in \Xi(\Omega)$ является трансляционно компактной в Ξ^+ тогда и только тогда, когда $g \in \Xi_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $g \in \Xi_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$. Тогда* уравнение (6.0) *обладает траекторным аттрактором $\mathcal{A}_g$ в пространстве Θ^+ .*

Лемма 2. *Пусть g – трансляционно компактна в пространстве Ξ^+. Тогда любое решение задачи* (6.0) *трансляционно компактно в пространстве Θ^+.*

Действительно, из оценки (3.1) аналогично (7.5) следует, что $\mathcal{H}^+(u)$ – ограниченное подмножество пространства $\Theta_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$, а следовательно, согласно лемме 6.1, компактно в пространстве Θ^+.

Рассмотрим несколько примеров трансляционно компактных правых частей g уравнения (6.0), при которых, согласно теореме 1, это уравнение обладает траекторным аттрактором.

Пример 1. Пусть $g = g(x)$ – ограниченная функция в $\mathbb{R}^n$ $(g \in L_\infty(\mathbb{R}^n))$. Тогда, для любого направления $\vec{l}$ и любой области Ω , удовлетворяющей условию (0.5), функция g трансляционно компактна в пространстве $\Xi^+ = \Xi^w(\Omega)$.

Пример 2. Пусть функция $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R})$ и пусть $V_l = \mathbb{R}^{n-1}$ – гиперплоскость, ортогональная прямой $\{s\vec{l},\ s \in \mathbb{R}\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим также, что функция $g_0 \in L_q^{\mathrm{loc}}(V_l)$, где показатель q такой же, как и в определении пространства Ξ. Тогда, как нетрудно проверить, функция

$$g(x) = h(x.\vec{l})g_0(x - \tfrac{x\,.\,\vec{l}}{\vec{l}\,.\,\vec{l}}\vec{l}) \tag{8.3}$$

принадлежит пространству $\Theta_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n)$, и следовательно, для любой области Ω, удовлетворяющей условиям (0.5) ограничение этой функции на Ω является трансляционно компактной функцией в пространстве Ξ^+.

В частности, пусть $x = (t, x')$, и $\vec{l}$ совпадает с первым координатным вектором. Тогда функция

$$g(t, x') = \sin(t^2)e^{|x'|^2} \tag{8.4}$$

является трансляционно компактной в направлении $\vec{l}$ в пространстве Ξ^+.

Замечание 3. Согласно лемме 6.1, трансляционно компактная в направлении $\vec{l}$ функция должна быть ограничена в этом направлении. Как показывает предыдущий пример, ограниченности в других направлениях может и не быть.

Исследуем теперь зависимость траекторного аттрактора от выбора области Ω.

Определение 3. *Пусть Ω_1 и Ω_2 – две области, удовлетворяющие условиям* (0.5) *с одним и тем же направлением $\vec{l}$, и пусть $g_i \in \Xi(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, g_i – трансляционно компактны в пространствах $\Xi^w(\Omega_i)$. Рассмотрим траекторные аттракторы $\mathcal{A}_{g_i}$ уравнений* (6.0) *в областях Ω_i с правыми частями g_i. Будем говорить, что $\mathcal{A}_{g_1} = \mathcal{A}_{g_2}$ если совпадают соответствующие множества полных траекторий*

$$\widehat{\mathcal{A}}_{g_1} = \bigcup\nolimits_{\xi\in\mathcal{Z}(\mathcal{H}^+(g_1))} K_\xi = \widehat{\mathcal{A}}_{g_2} \subset \Theta_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n) \tag{8.5}$$

В дальнейшем, всюду, где это не приводит к путанице, мы будем отождествлять траекторный аттрактор $\mathcal{A}_\Sigma$ с соответствующим ему множеством полных траекторий $\widehat{A}_\Sigma$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия определения 3 и*

$$g_1\big|_{\Omega_1\cap\Omega_2} = g_2\big|_{\Omega_1\cap\Omega_2} \tag{8.6}$$

Тогда траекторные аттракторы $\mathcal{A}_{g_1}$ и $\mathcal{A}_{g_2}$ совпадают.

Доказательство. Согласно теореме 7.3, для доказательства теоремы 2 достаточно проверить, что совпадают соответствующие множества полных символов

$$\mathcal{Z}(g_1) \equiv \mathcal{Z}(\mathcal{H}^+(g_1)) = \mathcal{Z}(g_2) \subset \Xi_{b(\vec{l})}(\mathbb{R}^n) \tag{8.7}$$

Пусть $\Omega = \Omega_1\cap\Omega_2$. Тогда, согласно условию (8.6), $\mathcal{H}^+(g_1)\big|_\Omega = \mathcal{H}^+(g_2)\big|_\Omega$, а значит,

$$\omega(g_1)\big|_\Omega = \omega(g_2)\big|_\Omega \tag{8.8}$$

Пусть $\xi \in \mathcal{Z}(g_1)$. Из определения полного символа следует, что существуют $\sigma_n \in \omega(g_1)$, такие что $T_{-n}\xi\big|_{\Omega_1} = \sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия (8.8) следует, что существуют $\sigma'_n \in \omega(g_2)$, такие что $\sigma_n\big|_\Omega = \sigma'_n\big|_\Omega$. Согласно лемме 6.2, существуют $\xi_n \in \mathcal{Z}(g_2)$, такие что $\xi_n\big|_\Omega = \sigma'_n\big|_\Omega$. Имеем

$$T_{-n}\xi\big|_\Omega = \xi_n\big|_\Omega \quad ; \quad \xi_n \in \mathcal{Z}(g_2)$$

Или, что то же самое

$$\xi\big|_{T_{-n}\Omega} = T_n\xi_n\big|_{T_{-n}\Omega} \quad ; \quad \xi_n \in \mathcal{Z}(g_2)$$

Согласно лемме 7.1,
$$\cup_{s\geq 0} T_{-s}\Omega = \mathbb{R}^n$$
Таким образом, $T_n\xi_n \to \xi$ в пространстве $\Xi(\mathbb{R}^n)$. Согласно следствию 6.1, получаем теперь, что $\xi \in \mathcal{Z}(g_2)$, то есть $\mathcal{Z}(g_1) \subset \mathcal{Z}(g_2)$. Обратное вложение доказывается аналогично. Теорема 2 доказана.

Предположим теперь, что область Ω удовлетворяет условиям (0.5) для двух различных направлений $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$. Пусть заданы две функции g_1 и g_2, трансляционно компактные в направлениях $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ соответственно. Тогда, согласно теореме 8.1, существуют траекторные аттракторы $\mathcal{A}_{g_1}^{l_1}$ – в направлении $\vec{l}_1$ для системы (6.0) с правой частью g_1 и $\mathcal{A}_{g_2}^{l_2}$ – в направлении $\vec{l}_2$ для системы (6.0) с правой частью g_2.

Теорема 3. *Траекторные аттракторы $\mathcal{A}_{g_1}^{l_1}$ и $\mathcal{A}_{g_2}^{l_2}$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают соответствующие ω–предельные множества*

$$\omega_{l_1}(g_1) = \omega_{l_2}(g_2) \tag{8.9}$$

Здесь $\omega_{l_i}(g_i) \equiv \omega(\mathcal{H}_{l_i}^+(g_i))$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{A}_{g_1}^{l_1} = \mathcal{A}_{g_2}^{l_2}$. Тогда формула (8.9) следует из теоремы 7.3 и леммы 6.2.

Предположим теперь, что выполнено условие (8.9). Тогда, согласно теореме 7.3 и замечанию к ней, достаточно проверить, что
$$\mathcal{Z}_{l_1}(g_1) = \mathcal{Z}_{l_2}(g_2)$$
Пусть $\xi \in \mathcal{Z}_{l_1}(g_1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$
$$T_{-n}^{l_1}\xi\big|_{\Omega} = \sigma_n \in \omega_{l_1}(g_1) = \omega_{l_2}(g_2)$$
Далее, используя результат леммы 6.2, аналогично доказательству предыдущей теоремы, получаем
$$T_n^{l_1}\xi_n \to \xi \text{ при } n \to \infty \text{ в пространстве } \Xi(\mathbb{R}^n)\ ;\ \xi_n \in \mathcal{Z}_{l_2}(g_2)$$
Так как ω_{l_i} строго инвариантны относительно полугруппы $\{T_s^{l_i}, s \geq 0\}$, то из равенства (8.9) и определения полного символа следует, что множество $\mathcal{Z}_{l_2}(g_2)$ инвариантно относительно полугруппы $\{T_s^{l_1}, s \geq 0\}$. Таким образом, $T_n^{l_1}\xi_n \in \mathcal{Z}_{l_2}(g_2)$, а значит, согласно следствию 6.1, $\xi \in \mathcal{Z}_{l_2}(g_2)$. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Пусть функция g такова, что*

$$\mathcal{H}^+_{l_1}(g) = \mathcal{H}^+_{l_2}(g) \equiv \mathcal{H}^+(g) \tag{8.10}$$

Тогда $\mathcal{A}^{l_1}_g = \mathcal{A}^{l_2}_g$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что согласно условиям (8.10), (8.2) и определению ω-предельного множества,

$$T^{l_2}_p \omega_{l_1}(g) = T^{l_2}_p \cap_{s\geq 0}\Big[\cup_{h\geq s} T^{l_1}_h \mathcal{H}^+(g)\Big]_{\Xi^+} \subset \cap_{s\geq 0}\Big[\cup_{h\geq s} T^{l_2}_p T^{l_1}_h \mathcal{H}^+(g)\Big]_{\Xi^+} =$$
$$= \cap_{s\geq 0}\Big[\cup_{h\geq s} T^{l_1}_h T^{l_2}_p \mathcal{H}^+(g)\Big]_{\Xi^+} \subset \cap_{s\geq 0}\Big[\cup_{h\geq s} T^{l_1}_h \mathcal{H}^+(g)\Big]_{\Xi^+} = \omega_{l_1}(g)$$

и, аналогично, $T^{l_1}_s \omega_{l_2}(g) \subset \omega_{l_1}(g)$ при $s \geq 0$.

Докажем, что $\omega_{l_1}(g) = \omega_{l_2}(g)$. Пусть $\xi \in \omega_{l_1}(g)$. Согласно представлению (8.2′) и условию (8.10), выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

$$\begin{cases} 1. \quad \exists s_0 \geq 0 \text{ , такое что } T^{l_1}_{s_0} g \in \omega_{l_2}(g) \\ 2. \quad T^{l_1}_s g = g \text{ для любого } s \geq 0 \\ 3. \quad \exists s_0 > 0, p_0 > 0 \text{ , такие что } T^{l_1}_{s_0} g = T^{l_2}_{p_0} g \end{cases} \tag{8.11}$$

В первом случае $T^{l_1}_s g \in \omega_{l_2}(g)$ при $s \geq s_0$, и следовательно, $\xi \in \omega_{l_2}(g)$.

Во втором случае $\omega_{l_1}(g) = \omega_{l_2}(g) = \{g\}$.

И, наконец, в третьем случае представим ξ, согласно (8.2′), в следующем виде:

$$\xi = \lim_{n\to\infty} T^{l_1}_{s_n} g$$

Без ограничения общности можно считать, что $s_n \geq n s_0$. Тогда

$$T^{l_1}_{s_n} g = T^{l_2}_{n p_0}(T^{l_1}_{s_n - n s_0} g)$$

Так как $T^{l_1}_{s_n - n s_0} g \in \mathcal{H}^+_{l_2}(g)$ и $n p_0 \to \infty$ при $n \to \infty$, то, согласно определению ω-предельного множества, $\xi \in \omega_{l_2}(g)$.

Итак, $\omega_{l_1}(g) \subset \omega_{l_2}(g)$. Обратное включение доказывается аналогично. Согласно теореме 3, $\mathcal{A}^{l_1}_g = \mathcal{A}^{l_2}_g$. Следствие доказано.

Пример 3. Пусть функция $g \in \Xi_b(\mathbb{R}^n)$, и выполнено следующее условие:

$$\exists h \in D'(\mathbb{R}) \text{ , такая что } \; g(x) = h(|x|) \tag{8.12}$$

Тогда, очевидно, что функция g является трансляционно компактной в любом направлении $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{H}_l^+(g)$ – не зависит от $\vec{l}$. Таким образом, согласно следствию 1, траекторные аттракторы $\mathcal{A}_g^l$ также не зависят от $\vec{l}$.

Следующий пример показывает, что даже в случае относительно простой (периодической) зависимости g от x зависимость траекторного аттрактора от направления $\vec{l}$ может быть весьма сложной.

Пример 4. Пусть функция $g \in \Xi_b(\mathbb{R}^n)$ является периодической относительно некоторой решетки $\mathbb{Z}^n$.

$$g(x_1 + k_1\vec{l}_1\,, \cdots, x_n + k_n\vec{l}_n) \equiv g(x_1, \cdots, x_n) \quad ; \quad k_i \in \mathbb{Z} \tag{8.13}$$

Здесь $\{\vec{l}_i\,, i = 1..n\}$ – базис в $\mathbb{R}^n$, порождающий решетку $\mathbb{Z}^n$. Фундаментальную область данной решетки обозначим через $\mathbb{Z}_0$

$$\mathbb{Z}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; x = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{l}_i\,; \, 0 \le x_i < 1\}$$

Пусть Π – естественная проекция на тор, соответствующий решетке периодов

$$\Pi \; : \mathbb{R}^n \to T = \mathbb{R}^n \big/ \mathbb{Z}^n$$

Для произвольного направления $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathcal{O}(\vec{l}) \in T$ замыкание образа прямой $\{s\vec{l}\,;\; s \in \mathbb{R}\}$ под действием проекции Π, а через $\mathbb{Z}(l)$ – множество

$$\mathbb{Z}(l) = \Pi^{-1}\mathcal{O}(l)\big|_{\mathbb{Z}_0}$$

Тогда, как нетрудно проверить, оболочка $\mathcal{H}_l^+(g)$ может быть описана следующим образом:

$$\mathcal{H}_l^+(g) = \{g(x + \vec{s})\,;\, \vec{s} \in \mathbb{Z}(l)\} \tag{8.14}$$

Так как в данном случае оболочка $\mathcal{H}_l^+$ строго инвариантна относительно действия группы T_s^l, то $\omega_l(g) = \mathcal{H}_l^+(g)$. Таким образом, согласно теореме 3, траекторные аттракторы $\mathcal{A}_g^{l^1}$ и $\mathcal{A}_g^{l^2}$ совпадают тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}(l^1) = \mathcal{O}(l^2)$.

Назовем направление $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ вполне иррациональным относительно данной решетки $\mathbb{Z}^n$, если все координаты вектора $\vec{l}$ в базисе $\{\vec{l}_i\,, i = 1..n\}$

являются иррациональными числами. Как известно, для любого вполне иррационального вектора $\vec{l}$ справедливо равенство $\mathcal{O}(l) = T$. Следовательно, для любых двух вполне иррациональных векторов $\vec{l^1}$ и $\vec{l^2}$ соответствующие траекторные аттракторы совпадают

$$\mathcal{A}_g^{l^1} = \mathcal{A}_g^{l^2} = \mathcal{A}_g$$

Для направления $\vec{l}$, не являющегося вполне иррациональным, траекторный аттрактор $\mathcal{A}_g^l$ есть собственное подмножество аттрактора $\mathcal{A}_g$.

Всюду в дальнейшем мы вновь предполагаем, что фиксировано некоторое направление $\vec{l}$ и область Ω, удовлетворяющая условиям (0.5).

Предположим теперь, что правая часть g системы (6.0) представляется в виде

$$g(x) = g_0(x) + g_1(x) \tag{8.15}$$

Здесь g_1 – трансляционно компактна в направлении $\vec{l}$ в пространстве Ξ^+, а функция $g_0 \in \Xi^+$ удовлетворяет следующему условию:

$$T_s g_0 \to 0 \text{ при } s \to \infty \text{ в пространстве } \Xi^+ \tag{8.16}$$

Тогда, как нетрудно проверить, g трансляционно компактна в направлении $\vec{l}$, и выполнено следующее равенство:

$$\omega(g) = \omega(g_1) \tag{8.17}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (8.15) *и* (8.16). *Тогда траекторные аттракторы* $\mathcal{A}_g$ *и* $\mathcal{A}_{g_1}$ *совпадают*

$$\mathcal{A}_{g_0+g_1} = \mathcal{A}_{g_1} \tag{8.18}$$

Действительно, формула (8.18) немедленно следует из формул (8.17) и (6.8).

Пример 5. Пусть $x = (t, x)$ и $\vec{l}$ совпадает с первым координатным вектором пространства $\mathbb{R}^n$. Так же, как и в примере 3, рассмотрим функцию

$$g_0(x) = \sin(t^2)e^{|x'|^2} \tag{8.19}$$

Так как $T_s \sin(t^2) \rightharpoondown 0$ в пространстве $L_2([0, 1])$ при $s \to \infty$, то, как нетрудно проверить, функция g_0 удовлетворяет условию (8.16). Пусть $g_1 \in \Xi_{b^+(\vec{l})}(\Omega)$. Тогда, согласно теореме 4, траекторные аттракторы $\mathcal{A}_{g_0+g_1}$ и $\mathcal{A}_{g_1}$ совпадают.

§9 Гладкость аттрактора.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о гладкости построенного ранее траекторного аттрактора при некоторых дополнительных предположениях относительно правой части уравнения (6.0) и самосопряженности матрицы a. Кроме этого, будет доказано свойство притяжения к траекторному аттрактору в более сильной топологии пространства $W^{\mathrm{loc}}_{2,p}(\Omega)$, $p > \frac{n}{2}$. Для этого нам понадобится несколько дополнительных условий на матрицу a и правую часть уравнения (6.0).

Условие 1. *Матрица a является самосопряженной: $a^* = a$.*

Условие 2. *Правая часть g принадлежит пространству $L^{\mathrm{loc}}_p(\Omega)$ для некоторого $p > \frac{n}{2}$.*

Условие 3. *Функция g трансляционно компактна в направлении $\vec{l}$ либо в пространстве $\mathbb{L}_1 = L^{\mathrm{loc}}_p(\Omega)$, либо в пространстве $\mathbb{L}_2 = L^{\mathrm{loc},w}_p(\Omega)$, то есть в пространстве $\mathbb{L}_1$, наделенном слабой топологией.*

Сформулируем теперь критерий трансляционной компактности в пространствах $\mathbb{L}_i$.

Лемма 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Функция $g \in L^{\mathrm{loc}}_p(\Omega)$ является трансляционно компактной в пространстве $\mathbb{L}_i(\Omega)$, $i = 1$ или 2.*

(2) *Для любого шара $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ сужение функции g на полуцилиндр*

$$K^+_{x_0,R} = \Omega \cap \{T_s B^R_{x_0}\, ;\, s \geq 0\}$$

трансляционно компактно в пространстве $\mathbb{L}_i(K^+_{x_0,R})$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Докажем обратную импликацию. Согласно теореме Эберлейна (лемма 1.2), как в случае $i = 1$, так и в случае $i = 2$, достаточно проверить лишь секвенциальную компактность оболочки $\mathcal{H}^+(g)$ в $\mathbb{L}_i$. Секвенциальная же компактность $\mathcal{H}^+(g)$ немедленно следует из условия (2) и канторовской диагональной процедуры. Лемма 1 доказана.

Определение 1. *Обозначим $\mathbb{W}_1 = W^{\mathrm{loc}}_{2,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}_2 = W^{\mathrm{loc},w}_{2,p}(\Omega)$. Аналогично определению 6.6 введем пространство Фреше $W_{b^+(l),m,p}(\Omega)$ как* *подпространство пространства $W_{m,p}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, выделяемое следующей системой полунорм:*

$$\|u\,; x_0, R, b^+(l)\|_{m,p} = \sup_{s \geq 0} \|u, \Omega \cap T_s B_{x_0}^R\|_{m,p} < \infty;\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ R \in \mathbb{R}_+$$

Пространство $W_{b(l),m,p}(\Omega)$ выделяется из $W_{m,p}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ системой полунорм

$$\|u\,; x_0, R, b(l)\|_{m,p} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u, \Omega \cap T_s B_{x_0}^R\|_{m,p} < \infty\ ;\ x_0 \in \mathbb{R}^n,\ R \in \mathbb{R}_+$$

Обозначим через $\mathbb{L}_{b^+(l)}$ и $\mathbb{L}_{b(l)}$ пространства $W_{b^+(l),0,p}(\Omega)$ и $W_{b(l),0,p}(\Omega)$ соответственно, а через $\mathbb{W}_{b^+(l)}$ и $\mathbb{W}_{b(l)}$ – пространства $W_{b^+(l),2,p}(\Omega)$ и $W_{b(l),2,p}(\Omega)$ соответственно.

Сформулируем достаточные условия трансляционной компактности в пространствах $\mathbb{L}_i$.

Лемма 2.

(1) *Функция g является трансляционно компактной в пространстве $\mathbb{L}_2$ тогда и только тогда, когда $g \in \mathbb{L}_{b^+(l)}$.*

(2) *Пусть функция $g \in W_{b^+(l),\alpha,p}(\Omega_\varepsilon)$ для некоторых $\alpha > 0$ и $\varepsilon \geq 0$. Тогда функция g трансляционно компактна в пространстве $\mathbb{L}_1$.*

Доказательство. Утверждение (1) этой леммы аналогично лемме 6.1. Докажем утверждение (2). Так как оболочка $\mathcal{H}^+(g)$ метризуема в пространстве $\mathbb{L}_1^+$, то для завершения доказательства леммы достаточно доказать, что из любой последовательности $\{s_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{s_k = s_{n_k}\,;\, k \in \mathbb{N}\}$, такую что

$$T_{s_k} g \to \xi \text{ в пространстве } \mathbb{L}_1^+$$

Без ограничения общности можно считать, что $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (в противном случае существует подпоследовательность $s_k \to s_0$, а из непрерывности полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$ следует тогда, что $T_{s_k} g \to T_{s_0} g$ в пространстве $\mathbb{L}_1^+$). Пусть $B_{x_0}^R$ – произвольный шар в $\mathbb{R}^n$. Согласно определению топологии в пространстве $\mathbb{L}_1^+$ и канторовской диагональной процедуре, достаточно доказать предкомпактность последовательности $T_{s_n} g\big|_{\Omega \cap B_{x_0}^R}$ в пространстве $L_p(\Omega \cap B_{x_0}^R)$.

Согласно лемме 7.1, существует $S = S(B_{x_0}^R)$, такое что $T_s B_{x_0}^R \subset \Omega_\varepsilon$ при $s \geq S$. Таким образом, согласно условию леммы, при $s_n \geq S$

$$\|T_{s_n} g, \Omega \cap B_{x_0}^R\|_{H_{\alpha,p}} \leq$$
$$\leq C\|g, T_{s_n} B_{x_0}^R\|_{\alpha,p} \leq C\|g, \Omega_\varepsilon\,; T_S x_0, R, b^+(l)\|_{\alpha,p} \leq C(x_0, R)$$

Итак, последовательность $T_{s_n} g\big|_{\Omega \cap B_{x_0}^R}$, $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geq S$ ограничена в пространстве $H_{\alpha,p}(\Omega \cap B_{x_0}^R)$, а так как вложение $H_{\alpha,p} \subset L_p$ компактно при любом $\alpha > 0$, то эта последовательность является предкомпактной в пространстве $L_p(\Omega \cap B_{x_0}^R)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1,2 и 3. Тогда траекторный аттрактор* $\widehat{\mathcal{A}}_g$ *уравнения* (6.0) *является компактом в пространстве* $\mathbb{W}_i(\mathbb{R}^n)$, *а следовательно,* $\mathcal{A}_g$ *– компакт в* $\mathbb{W}_i(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим оболочку $\widehat{\mathcal{H}}^+(g)$ функции g в пространстве $\mathbb{L}_i$. Так как g трансляционно компактна в $\mathbb{L}_i$, то (аналогично случаю трансляционной компактности в пространстве Ξ^+) оболочка $\widehat{\mathcal{H}}^+(g)$ и ее ω-предельное множество $\widehat{\omega}(g)$ компактны в пространстве $\mathbb{L}_i(\Omega)$, а множество полных символов $\widehat{\mathcal{Z}}(g)$ является ограниченным подмножеством пространства $\mathbb{L}_{b(l)}(\mathbb{R}^n)$ и компактом в пространстве $\mathbb{L}_i(\mathbb{R}^n)$. Однако, как нетрудно показать,

$$\widehat{\mathcal{H}}^+(g) = \mathcal{H}^+(g)\ ;\ \widehat{\omega}(g) = \omega(g)\ ;\ \widehat{\mathcal{Z}}(g) = \mathcal{Z}(g) \tag{9.1}$$

Здесь $\mathcal{H}^+(g) = \Sigma$, $\omega(g)$, $\mathcal{Z}(g)$ – оболочка, ω- предельное множество и множество полных символов функции g, рассматриваемой как трансляционно компактная функция в Ξ^+. Действительно, пусть $\xi \in \omega(g)$. Тогда, согласно (8.2′),

$$\xi = \Xi^+\text{- }\lim\nolimits_{n\to\infty} T_{s_n} g \tag{9.2}$$

для некоторой последовательности $s_n \to \infty$. Так как g – трансляционно компактна в пространствеL_i, то множество предельных точек последовательности $\{T_{s_n} g, n \in \mathbb{N}\}$, равно как и любой ее подпоследовательности непусто. Однако из (9.2) следует, что это множество состоит лишь из одной точки $\{\xi\}$, то есть

$$\xi = \mathbb{L}_i^+\text{- }\lim\nolimits_{n\to\infty} T_{s_n} g \in \widehat{\omega}(g) \tag{9.3}$$

Следовательно, $\omega(g) \subset \widehat{\omega}(g)$. Обратное вложение очевидно. Остальные равенства из (9.1) доказываются аналогично.

Таким образом, согласно оценке (4.25), получаем, что любая полная траектория $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ семейства (6.2) принадлежит пространству $\mathbb{W}_{b(l)}(\mathbb{R}^n)$, и множество $\widehat{\mathcal{A}}_g$ всех полных траекторий ограничено в этом пространстве, а значит, согласно следствию 1.3, предкомпактно в пространстве $\mathbb{W}_2(\mathbb{R}^n)$. Замкнутость множества $\widehat{\mathcal{A}}_g$ в пространстве $\mathbb{W}_2(\mathbb{R}^n)$ доказывается аналогично теореме 6.1.

Итак, в случае слабой топологии ($i = 2$) теорема 1 доказана.

Рассмотрим случай сильной топологии $i = 1$. Докажем компактность множества $\widehat{\mathcal{A}}_g$ в пространстве $\mathbb{W}_1(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим произвольную последовательность $u_n \in \widehat{\mathcal{A}}_g$ с соответствующими полными символами $\xi_n \in \mathcal{Z}(g)$. Тогда, согласно доказанному выше, без ограничения общности, можно считать, что $u_n \rightharpoonup u$ в пространстве $W^{\mathrm{loc},w}_{2,p}(\mathbb{R}^n)$ и $\xi_n \rightharpoonup \xi$ в пространстве $L^{\mathrm{loc},w}_p(\mathbb{R}^n)$, причем $u \in K_\xi$. Очевидно, что для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $u_n \to u$ и в сильной топологии. Таким образом, достаточно доказать, что для любого шара $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ последовательность

$$u_n\big|_{B^R_{x_0}} \to u\big|_{B^R_{x_0}} \text{ в пространстве } W_{2,p}(B^R_{x_0}) \tag{9.4}$$

Заметим, прежде всего, что $\xi_n \to \xi$ в пространстве $\mathbb{L}^+_1(\mathbb{R}^n)$. Действительно, так как g трансляционно компактна в сильной топологии, то $\mathcal{Z}(g)$ – компакт в $\mathbb{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Рассуждая далее так же, как и при доказательстве равенств (9.1), получим $\xi_n \to \xi$.

Докажем формулу (9.4). Введем срезающую функцию $\phi(x) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, такую что $\phi(x) = 1$ при $x \in B^R_{x_0}$ и $\phi(x) = 0$ при $x \notin B^{R+\varepsilon}_{x_0}$ и перепишем уравнение (6.2) в следующей форме, аналогичной (4.3):

$$\begin{cases} \Delta(\phi u_n) = 2\nabla\phi.\nabla u_n + \Delta\phi u_n + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \phi a^{-1}\left[-\gamma\mathcal{D}u_n + f(u_n) + \xi_n\right] \equiv \overline{\xi}_n(x) \\ \qquad \phi u_n\big|_{B^{R+\varepsilon}_{x_0}} = 0 \end{cases} \tag{9.5}$$

Заметим, что $\overline{\xi}_n \to \overline{\xi}$ в пространстве $L_p(B^{R+\varepsilon}_{x_0})$. Действительно, по доказанному выше $\phi\xi_n \to \phi\xi$ в L_p. Так как вложение $W_{2,p} \subset W_{1,p}$ компактно и $u_n \rightharpoonup u$ в $W_{2,p}$, то $\nabla u_n \to \nabla u$ в L_p. Аналогично, так как вложение $W_{2,p} \subset C$ компактно ($p > \frac{n}{2}$) и f непрерывна, то $f(u_n) \to f(u)$ в L_p.

Итак, $\overline{\xi_n} \to \overline{\xi}$ в $L_p(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$. Согласно теореме об L_p–регулярности решений уравнения Лапласа (см. [18]), $\phi u_n \to \phi u$ в пространстве $W_{2,p}(B_{x_0}^{R+\varepsilon})$. Формула (9.4) доказана. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о притяжении к аттрактору $\mathcal{A}_g$ в топологии пространства $\mathbb{W}_i$. Заметим, что, так как никаких условий на границу $\partial\Omega$ не налагается, то, вообще говоря, $T_s K_\Sigma^+$ не является подмножеством пространства $\mathbb{W}_i$ ни для какого $s \geq 0$, и таким образом, аналог определения 6.2 для притяжения в пространствах $\mathbb{W}_i$, $i = 1, 2$ не является корректным. Однако, согласно теореме 4.3, для любого шара $B_{x_0}^R \subset\subset \Omega$

$$T_s K_\Sigma^+\big|_{B_{x_0}^R} \subset W_{2,p}(B_{x_0}^R) \text{ при } s \geq 0$$

Таким образом, корректно следующее определение (см. следствие 7.2).

Определение 2. *Будем говорить, что аттрактор $\mathcal{A}_g$ притягивает семейство множеств $\{T_s K_\Sigma^+, s \geq 0\}$ в топологии пространства $\mathbb{W}_i$, если для любого шара $B_{x_0}^R \subset\subset \Omega$ сужение $\mathcal{A}_g\big|_{B_{x_0}^R}$ аттрактора $\mathcal{A}_g$ на этот шар притягивает семейство $\{T_s K_\Sigma^+\big|_{B_{x_0}^R}, s \geq 0\}$ в пространстве $\mathbb{W}_i(B_{x_0}^R)$, то есть для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A}_g\big|_{B_{x_0}^R})$ множества $\mathcal{A}_g\big|_{B_{x_0}^R}$ в пространстве $\mathbb{W}_i(B_{x_0}^R)$ существует $S = S(\mathcal{O})$, такое что для любого $s \geq S$ выполнено условие*

$$T_s K_\Sigma^+ \big|_{B_{x_0}^R} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}_g\big|_{B_{x_0}^R}) \text{ при } s \geq S$$

Аналогично — последовательность $T_{s_n} u_n \to u$, $s_n \to \infty$, $u_n \in K_\Sigma^+$ сходится в пространстве $\mathbb{W}_i$, если для любого шара $B_{x_0}^R \subset\subset \Omega$

$$T_{s_n} u_n\big|_{B_{x_0}^R} \to u\big|_{B_{x_0}^R} \text{ в пространстве } \mathbb{W}_i(B_{x_0}^R) \tag{9.6}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1,2,3. Тогда траекторный аттрактор $\mathcal{A}_g$ уравнения (6.0) ($\Sigma = \mathcal{H}^+(g)$) притягивает семейство полутраекторий $\{T_s K_\Sigma^+, s \geq 0\}$ в топологии пространства $\mathbb{W}_i$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $u_n \in K_\Sigma^+$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $s_n \to \infty$. *Тогда из последовательности* $\{T_{s_n} u_n, s \in \mathbb{N}\}$ *можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в топологии пространства* $\mathbb{W}_i$ *к некоторой* $u \in \mathcal{A}_g$.

Доказательство. Согласно теореме 4.3, для любого шара $B_{x_0}^R \subset\subset \Omega$ последовательность $T_{s_n} u_n\big|_{B_{x_0}^R}$ ограничена в пространстве $W_{2,p}(B_{x_0}^R)$, а значит, предкомпактна в пространстве $\mathbb{W}_2(B_{x_0}^R)$. Используя диагональную процедуру, выделим из $T_{s_n} u_n$ подпоследовательность, которую мы также обозначим через $T_{s_n} u_n$, сходящуюся в пространстве $\mathbb{W}_2(\Omega)$ к некоторой функции $u \in \mathbb{W}_2(\Omega)$. Из определения траекторного аттрактора следует, что $u \in \mathcal{A}_g$. Итак, в случае выбора слабой топологии ($i = 2$) лемма 3 доказана.

Рассмотрим случай сильной топологии ($i = 1$). В этом случае, совершенно аналогично рассуждению, приведенному в доказательстве теоремы 2, показывается, что из $T_{s_n} u_n \rightharpoonup u$ в пространстве $\mathbb{W}_2$ следует, что $T_{s_n} u_n \to u$ в пространстве $\mathbb{W}_1$. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 5. Предположим противное. Тогда существует шар $B_{x_0}^R \subset\subset \Omega$, такой что множество $\mathcal{A}_g\big|_{B_{x_0}^R}$ не притягивает семейство $T_s K_\Sigma^+\big|_{B_{x_0}^R}$ в пространстве $\mathbb{W}_i(B_{x_0}^R)$. В свою очередь (см. [29]), это означает, что существует последовательность $\{T_{s_n} u_n\big|_{B_{x_0}^R}, n \in \mathbb{N}\}$, $u_n \in K_\Sigma^+$ и $s_n \to \infty$, такая что множество ее предельных в топологии $\mathbb{W}_i$ точек не пересекается с $\mathcal{A}_g\big|_{B_{x_0}^R}$. Однако последнее утверждение противоречит лемме 3. Теорема 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия 1,2 и 3. Тогда, так как вложение* $W_{2,p} \subset C$ *компактно* ($p > n/2$), *то для любого шара* $B_{x_0}^R \subset\subset \Omega$ *справедлива следующая формула:*

$$\lim_{s \to +\infty} \operatorname{dist}_{C(B_{x_0}^R)} \{T_s K_\Sigma^+\big|_{B_{x_0}^R}, \mathcal{A}_g\big|_{B_{x_0}^R}\} = 0 \tag{9.7}$$

§10 Траекторный аттрактор эллиптического уравнения с нелинейностью, явно зависящей от x.

В этом параграфе мы кратко изложим схему построения траекторного аттрактора системы (0.1), в которой нелинейность $f = f(u, x)$ может зависеть от $x \in \Omega$. Благодаря наличию оценок (3.1) и (4.25) в общем случае, все результаты, полученные в §§6–9 почти дословно переносятся на случай уравнения (0.1). Единственное отличие состоит в необходимости изменить определение символа, данное в §6. Действительно, так как нелинейная функция f явно зависит от x, то, как известно (см. [26]), для корректного определения траекторного аттрактора необходимо в качестве символа σ уравнения (0.1) рассматривать пару $\sigma = (f(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\,,\,g(\,\cdot\,))$ (в противном случае семейство $\{K_\sigma^+, \sigma \in \Sigma\}$, построенное в §6, не будет, вообще говоря, трансляционно согласованным, и мы не сможем определить действие полугруппы $\{T_s, s \geq 0\}$ на пространстве K_Σ^+). Остановимся на этом более подробно.

Определение 1. *Пусть* $G = \mathbb{R}^k \times \overline{\Omega}$. *Обозначим*

$$\mathbb{M} = C^{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)) = C^{\mathrm{loc}}(G, \mathbb{R}^k) \tag{10.1}$$

Система полунорм в пространстве $\mathbb{M}$ *задается следующим образом:*

$$\|f\|_{K, B_{x_0}^R} = \sup\{|f(u,x)| \,:\, u \in K\,,\, x \in \overline{\Omega} \cap B_{x_0}^R\}$$

Здесь K *– произвольный компакт в* $\mathbb{R}^k$, $x_0 \in \mathbb{R}^k$, $R \in \mathbb{R}_+$.

Очевидно, что нелинейность f, удовлетворяющая условиям (0.3), принадлежит пространству $\mathbb{M}$. Рассмотрим оболочку функции f в пространстве $\mathbb{M}$

$$\mathcal{H}^+(f) = \mathcal{H}_l^+(f) = \big[f(u, T_s^l x)\,,\, s \geq 0\big]_{\mathbb{M}} \tag{10.2}$$

Определение 2. *Функция* $f \in \mathbb{M}$ *называется трансляционно компактной в* $\mathbb{M}$ *(в направлении* $\vec{l}$*), если ее оболочка* (10.2) *– компакт в пространстве* $\mathbb{M}$.

Критерии трансляционной компактности в пространствах вида (10.1) сформулированы в [26].

В дальнейшем предполагается, что нелинейность f в системе (0.1) является трансляционно компактной в пространстве $\mathbb{M}$.

Замечание 1. Пусть $f \in \mathbb{M}$ и удовлетворяет условию

$$f(u\,,\,T_s^l x) \equiv f(u\,,\,x) \quad , \quad s \geq 0$$

Тогда $\mathcal{H}_l^+(f) = \{f\}$, и следовательно, функция f является трансляционно компактной в $\mathbb{M}$.

Для построения траекторного аттрактора уравнения (0.1), вместо семейства (6.2), рассмотрим следующее семейство уравнений вида (0.1):

$$\begin{cases} a\Delta u + \gamma \mathcal{D}u - h(u,t) = \xi(x) \\ \sigma \equiv (h(\,\cdot\,,\,\cdot\,), \xi(\,\cdot\,)) \in \Sigma = \mathcal{H}^+(f) \times \mathcal{H}^+(g) \end{cases} \tag{10.3}$$

Здесь $\{f, g\}$ – нелинейность и правая часть исходной системы (0.1) соответственно. Аналогично §6, будем называть множество Σ пространством символов, а его элементы $\{h, \xi\}$ – символами семейства (10.3).

Замечание 2. Пусть f трансляционно компактна в пространстве $\mathbb{M}$ и удовлетворяет условиям (0.2). Тогда, как нетрудно проверить, любая функция $h \in \mathcal{H}^+(f)$ удовлетворяет условиям (0.3) с теми же константами, что и исходная функция f. Таким образом, оценки (3.1) и (4.25) выполняются равномерно по всем уравнениям семейства (10.3).

С учетом указанных выше изменений все определения и теоремы §§6–9 переносятся на случай уравнения (0.1). Например, аналогами теорем 8.1, 9.1 и 9.2 будут следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть f трансляционно компактна в пространстве $\mathbb{M}$, и удовлетворяет условиям (0.3), а g – трансляционно компактна в пространстве Ξ^+. Тогда уравнение (0.1) обладает траекторным аттрактором $\mathcal{A}_{\{f,g\}} = \mathcal{A}_\Sigma$ ($\Sigma = \mathcal{H}^+(f) \times \mathcal{H}^+(g)$).*

Теорема 2. *Пусть f трансляционно компактна в $\mathbb{M}$ и выполнены условия 9.1,9.2 и 9.3. Тогда $\mathcal{A}_{f,g}$ – компакт в пространстве $\mathbb{W}_i^+(\Omega)$ и притягивает K_Σ^+ в топологии пространства $\mathbb{W}_i^+(\Omega)$ (в смысле определения 9.2).*

§11 *Примеры траекторных аттракторов.*

В этом параграфе будет приведено несколько примеров уравнений вида (0.1) и рассмотрены соответствующие им траекторные аттракторы. Мы начнем с некоторого класса уравнений вида (0.1), траекторные аттракторы которых являются тривиальными ($\mathcal{A} = \{u \equiv 0\}$).

Теорема 1. *Предположим, что правая часть системы (0.1) $g \equiv 0$, и оператор γ является самосопряженным (то есть все матрицы γ^i в формуле (0.2) являются самосопряженными). Пусть также нелинейная функ-*

ция f удовлетворяет условиям (0.3) *и может быть представлена в следующем виде:*

$$f(u) = \alpha u + F(u) \ , \text{ где } \alpha > 0 \text{ и } F(u).u \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^n \tag{11.1}$$

Тогда для любой области Ω, удовлетворяющей условиям (0.5), *траекторный аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения* (0.1) *состоит из единственной точки $u \equiv 0$.*

Доказательство. Заметим,что из условия (11.1) следует $f(0) = 0$ и таким образом, $u \equiv 0$ является решением уравнения (0.1). Докажем, что $u \equiv 0$ – единственное решение этого уравнения в классе $\Theta(\mathbb{R}^n)$. Действительно, пусть $u \in \Theta(\mathbb{R}^n)$ – решение уравнения (0.1). Тогда так как $g \equiv 0$, то из теоремы 5.1 следует, что $u \in \Theta_b(\mathbb{R}^n)$.

Умножим уравнение (0.1) скалярно в $\mathbb{R}^k$ на функцию $ue^{-\varepsilon|x|}$, где ε – достаточно малое положительное число, и проинтегрируем по $x \in \mathbb{R}^n$. Получим

$$\left\langle a\nabla u, \nabla(ue^{-\varepsilon|x|})\right\rangle + \alpha\left\langle e^{-\varepsilon|x|}u, u\right\rangle - \left\langle \gamma\mathcal{D}u, ue^{-\varepsilon|x|}\right\rangle \leq 0 \tag{11.2}$$

Так как $a + a^* > 0$ и $|\nabla e^{-\varepsilon|x|}| \leq \varepsilon e^{-\varepsilon|x|}$, то

$$\begin{aligned} \left\langle a\nabla u, \nabla(ue^{-\varepsilon|x|})\right\rangle &\geq \\ \geq C\left\langle |\nabla u|^2 e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle - C_1\varepsilon\left\langle |\nabla u|\cdot|u|e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle &\geq \\ \geq C_2\left\langle |\nabla u|^2 e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle - C_3\varepsilon^2\left\langle |u|^2 e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle & \end{aligned} \tag{11.3}$$

Интегрируя по частям третье слагаемое формулы (11.2), учитывая самосопряженность матриц γ^i, получим

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \gamma\mathcal{D}u, ue^{-\varepsilon|x|}\right\rangle\right| &\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left|\left\langle \partial_{x_i}(\gamma^i u.u)e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle\right| \leq \\ \leq C\varepsilon\left\langle |\nabla u|\cdot|u|e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle &\leq C_2\left\langle |\nabla u|^2 e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle - C_3\varepsilon^2\left\langle |u|^2 e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle \end{aligned} \tag{11.4}$$

Подставив эти оценки в формулу (11.2), получим при достаточно малом ε

$$\left\langle |u|^2 e^{-\varepsilon|x|}, 1\right\rangle \leq 0$$

Таким образом, $u \equiv 0$. Согласно теореме 7.3 получаем теперь, что $\mathcal{A} = \{u \equiv 0\}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Условие (11.1), вообще говоря, не влечет монотонности уравнения (0.1). Так, например, все условия теоремы 1 выполнены для функции

$$F(u) = u|u|^2(2 + \sin |u|^2)$$

Замечание 2. Условие самосопряженности матриц γ^i в теореме 1 является существенным. Действительно, система обыкновенных уравнений

$$y''(t) + \gamma y'(t) - y(t) = y(|y|^2 - 1)^2$$

в которой $y = (y^1, y^2)$, а

$$\gamma = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет нетривиальное решение $y(t) = (\sin t, \cos t)$.

Следующая серия примеров показывает, что в отличие от аттракторов эволюционных уравнений, эллиптический аттрактор может не быть связным.

Теорема 2. *Предположим, что размерность пространства независимых переменных $n = 1$ или $n = 2$. Пусть также $a = a^* > 0$, $\gamma = 0$, $g \equiv 0$, а нелинейная функция f удовлетворяет условиям* (0.3) *и* $f(u).u \geq 0$. *Тогда всякое решение уравнения*

$$a\Delta u = f(u) \tag{11.5}$$

из класса $\Theta(\mathbb{R}^n)$ является константой $u \equiv u_0 \in \mathbb{R}^k$, $f(u_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $u \in \Theta(\mathbb{R}^n)$ – решение уравнения (11.5). Тогда, из теоремы 5.1 следует, что $u \in \Theta_b(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим функцию $y(x) = au(x).u(x)$. Нетрудно проверить (см. §4), что

$$\Delta y = 2a\nabla u.\nabla u + 2f(u).u \geq 0 \tag{11.6}$$

Таким образом, $y(x)$ является ограниченной субгармонической функцией в $\mathbb{R}^n$ при $n = 1$ или $n = 2$, то есть $y(x) \equiv const$ (в случае $n = 1$ это утверждение очевидно, так как y – выпуклая функция, в случае $n = 2$ оно доказано ниже в лемме 1). Из правой части уравнения (11.6) получаем теперь, что $\nabla u \equiv 0$. Теорема 2 доказана.

Приведем для полноты изложения доказательство аналога теоремы Лиувилля для субгармонических функций в $\mathbb{R}^2$.

Лемма 1. *Всякая ограниченная субгармоническая функция $v \in L_{1,b}(\mathbb{R}^2)$ является константой.*

Доказательство. Применяя в случае необходимости оператор осреднения, без ограничения общности можно считать, что $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap C_b(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta v(x) = \varphi(x) \geq 0 \tag{11.7}$$

Если $\varphi(x) \equiv 0$, то v - гармоническая, и утверждение леммы немедленно следует, например, из неравенства Харнака. Предположим, что $\varphi(x) \neq 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\varphi(0) \neq 0$. Представим функцию v в шаре B_0^R в виде суммы $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$, где

$$\begin{cases} \Delta v_1(x) = 0 \\ v_1\big|_{\partial B_0^R} = v\big|_{\partial B_0^R} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v_2(x) = \varphi(x) \\ v_2\big|_{\partial B_0^R} = 0 \end{cases}$$

Из принципа максимума и ограниченности функции $v(x)$ следует, что $|v_1(x)| \leq C$ равномерно по $R \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим функцию $v_2(x)$. Так как $\varphi(x) \neq 0$, то существует шар B_0^ρ, такой что $\varphi(x) \geq \varepsilon > 0$ при $x \in B_0^\rho$. Тогда, согласно принципу максимума, $v_2(x) \leq \widehat{v}(x)$ при $x \in B_0^R$, где $\widehat{v}(x)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta \widehat{v}(x) = \varepsilon \chi_{B_0^\rho}(x) \\ \widehat{v}\big|_{\partial B_0^R} = 0 \end{cases} \tag{11.8}$$

Здесь $\chi_{B_0^\rho}(x)$ – характеристическая функция шара B_0^ρ. Решение уравнения (11.8) легко выписывается в явном виде. В частности

$$\widehat{v}(0) = -\frac{\varepsilon}{2}\rho^2 \ln \frac{R\sqrt{e}}{\rho}$$

Таким образом, $v_2(0) \leq \widehat{v}(0) \to -\infty$ при $R \to \infty$, что противоречит ограниченности функции v. Лемма 1 доказана.

Замечание 3. Элементарные примеры показывают, что в случае размерности $n \geq 3$ утверждение теоремы 2, вообще говоря, неверно. Условие $\gamma = 0$ также является существенным. Так, например, следующее уравнение ($k = 1$, $n = 1$):

$$y''(t) + 2y'(t) = f(y)$$

в котором

$$f(y) = \begin{cases} y^3 & \text{при } y < 0; \\ \sin^2 y(1 - \sin y \cos y) & \text{при } 0 \le y \le \pi; \\ (y-\pi)^3 & \text{при } y > \pi; \end{cases}$$

допускает семейство решений $y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(t + t_0)$.

Пример 1. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ следующее уравнение

$$\varDelta u = u(u-1)^2(u-2)^2 \cdots (u-N)^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad N \in \mathbb{N}$$

Тогда, согласно теореме 2, траекторный аттрактор этого уравнения состоит из $N+1$ изолированной точки $u \equiv 0$, $u \equiv 1, \cdots, u \equiv N$.

Завершим этот параграф рассмотрением примера 'автономного' уравнения (то есть уравнения, не зависящего явно от x), траекторный аттрактор которого имеет бесконечную размерность.

Пример 2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ следующее уравнение:

$$\varDelta u - u = -2u\theta(u) + u|u|^2(1 - \theta(u)) \tag{11.9}$$

Здесь $\theta(u)$ – срезающая функция класса C^∞, равная единице при $|u| < 1$ и нулю при $|u| > 2$.

Нетрудно проверить, что уравнение (11.9) удовлетворяет всем условиям теоремы 8.1, а следовательно, обладает траекторным аттрактором, порождаемом всеми ограниченными решениями этого уравнения. Заметим, что при $|u| \le 1$ уравнение (11.9) совпадает с линейным уравнением

$$\varDelta v + v = 0 \tag{11.10}$$

Обозначим через V_0 пространство решений этого уравнения из класса $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^2)$. Очевидно, что множество V_0 является замкнутым бесконечномерным подпространством пространства $C_b(\mathbb{R}^2)$. Действительно, V_0 содержит бесконечное множество линейно независимых функций вида

$$v_\alpha(x) = \sin \alpha_1 x_1 \sin \alpha_2 x_2 \cdots \sin \alpha_n x_n \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$$

Следовательно, траекторный аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения (11.9) содержит единичный шар бесконечномерного линейного подпространства V_0 и, таким образом, является бесконечномерным. Более того, в этом примере пересечение аттрактора $\mathcal{A}$ с любым шаром $B^R_{x_0} \subset \varOmega$ имеет бесконечную хаусдорфову и фрактальную размерность, например, в пространстве $L_2(B^R_{x_0})$.

Литература.

1. Бабин А.В., Вишик М.И. *Аттракторы эволюционных уравнений.*– М.: Наука, 1989.
2. Бабин А.В. *Аттрактор обобщенной полугруппы, порожденной эллиптическим уравнением в цилиндрической области* // Изв. РАН **58, В2** (1994), 3–18.
3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.*– М.: Наука, 1996.
4. Брело М. *Основы классической теории потенциала.*– М.: Мир, 1964.
5. Вишик М.И., Зелик С.В *Траекторный аттрактор нелинейной эллиптической системы в цилинндрической области*// Математический Сборник **187 В12**, 21–56.
6. Вольперт А. И., Худяев С.И. *Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики.*– М.: Наука, 1975.
7. Зелик С.В. *Ограниченность решений нелинейной эллиптической системы в цилиндрической области* // Матем. Заметки **61** (1997), no. 3, 447–450.
8. Иосида К. *Функциональный анализ.*– М.: Мир, 1967.
9. Кондратьев В.А., Ландис Е.М. *Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.*– Итоги науки и техники. Сер. "Современные проблемы математики". — М.: ВИНИТИ,**32** (1988), 100–215.
10. Кошелев А.И. *Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.*– М.: Наука, 1986.
11. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.*– М.: Гостехиздат, 1956.
12. Крылов Н.В. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.*– М.: Наука, 1985.
13. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.*– М.: Наука, 1973.
14. Ландис Е.М. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.*– М.: Наука, 1971.
15. Лионс Ж.Л., Мадженес Е. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.*– М.: Наука, 1965.
16. Рудин У. *Функциональный анализ.*– М.: Мир, 1975.
17. Соболев С.Л. *Некоторые приложения функционального анализа в математической физике.*– М.: Наука, 1988.
18. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.*– М.: Мир, 1980.
19. Хатсон В., Пим Дж. *Приложения функционального анализа и теории операторов.*– М.: Мир, 1983.
20. Шеффер Х. *Топологические векторные пространства.*– М.: Мир, 1971.
21. Aronszain N., Gagliardo E. *Interpolation spaces and interpolation methods* // Ann. Mat. Pura Appl (4) **68** (1965).
22. Babin A.V. *Inertial manifolds for traveling-wave solutions of reaction-diffusion systems* // Comm.Pure Appl.Math. **48** (1995), 167–198.

23. Brunovsky P., Mora X., Polacik P., Sola-Morales J. *Asymptotic behavior of solutions of semilinear elliptic equations on an unbounded strip* // Acta Math. Univ. Comenianae **LX, 2** (1995), 163–183.
24. Calsina A., Mora X., Sola-Morales J. *The dynamical approach to elliptic problems in cylindrical domains and a study of their parabolic singular limit* // J. Differential Equations **102** (1993), 244–304.
25. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Non-autonomous evolutionary equations with translation–compact symbols and their attractors* // C. R. Acad. Sci. Paris **321, Series 1** (1995), 153–158.
26. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Trajectory attractors for evolution equations* // C. R. Acad. Sci. Paris **t. 321, Serie 1** (1995), 1309–1314.
27. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Evolution equations and their trajectory attractors* // J. Math. Pures Appl. (1997).
28. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension* // J. Math. Pures Appl. **73** (1994), no. 3, 279–333.
29. Hale J.K. *Asymptotic behaviour of dissipative systems* // Math. Surveys and Mon., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).
30. Kirchgassner K. *Wave solutions of reversible systems and application* // J. Diff. Eqns. **45** (1982), 113–127.
31. Mielke A. *Essential manifolds for an elliptic problem in an infinite strip* // J. Diff. Eqns **110** (1994), 322–355.
32. Sell G.R. *Global attractors for 3D Navier–Stokes equations* // Univ. of Minesota, Preprint, (1995), 1–26.
33. Temam R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* – Springer-Verlag, 1988.