УДК 517.95

АТТРАКТОР КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИССИПАЦИЕЙ В $\mathbb{R}^n$: РАЗМЕРНОСТЬ И ε-ЭНТРОПИЯ.

Зелик С.В.

В пространстве $x \in \mathbb{R}^n$ рассматривается нелинейное гиперболическое уравнение следующего вида:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u - \Delta_x u + f(u) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \gamma > 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0; \quad \partial_t u\big|_{t=0} = u_0' \end{cases} \tag{1}$$

Уравнения вида (1) при различных предположениях на нелинейную функцию f и правую часть g исследовались многими авторами (см., например, [1], [7], [9] в случае задачи (1) в ограниченной области Ω и [6], [8] в случае $\Omega = \mathbb{R}^n$).

В данной работе предполагается, что нелинейная функция f представляется в виде

$$f(u) = \lambda_0 u + f_1(u) + f_2(u), \quad \lambda_0 > 0, \tag{2}$$

где функция f_1 удовлетворяет условиям:

$$1.\ f_1(u) \cdot u \geq 0, \quad 2.\ f_1'(u) \geq -C, \tag{3}$$

а функция f_2 ограничена вместе со своей производной:

$$|f_2(u)| + |f_2'(u)| \leq C,\ \forall u \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Кроме того, предполагается, что в случае $n > 2$ нелинейность f_1 удовлетворяет следующим ограничениям на рост по u:

$$\begin{cases} 1.\ |f_1'(u)| \leq C(1 + |u|^q), \quad q < \frac{2}{n-2} \\ 2.\ |f_1''(u)| \leq C(1 + |u|^m),\ \text{где } m = 1 \text{ при } n = 3 \text{ и } m = 0 \text{ при } n > 3 \end{cases} \tag{5}$$

Для формулировки условий на начальные данные (u_0, u_0') и правую часть g нам понадобится следующее определение.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35B35, 35B40.

Определение 1. *Обозначим через* $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ *шар радиуса* R *с центром в* x_0. *Для каждого* $l \in \mathbb{R}_+$ *и* $1 \le p \le \infty$ *определим пространство*

$$W^{l,p}_b(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{W^{l,p}_b} \equiv \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|u\|_{W^p_l(B^1_{x_0})} < \infty\} \tag{6}$$

Как обычно, символ W^p_l *обозначает соболевское пространство функций, производные которых до порядка* l *включительно принадлежат* L^p.

В качестве фазового пространства задачи (1) выбирается следующее пространство:

$$E_b = W^{1,2}_b(\mathbb{R}^n) \times L^2_b(\mathbb{R}^n), \quad \xi_u \equiv (u, \partial_t u) \in E_b \tag{7}$$

Таким образом, мы будем изучать только ограниченные при $|x| \to \infty$ решения задачи (1).

Теорема 1. *Пусть* $g \in L^2_b(\mathbb{R}^n)$, *и выполнены условия* (2)–(5). *Тогда для любого* $\xi_u(0) = (u_0, u'_0) \in E_b$ *существует* единственное *решение* $u(t)$ *задачи* (1), *такое что* $\xi_u(t) \in E_b$ *при* $t \ge 0$, *и справедлива оценка*

$$\|\xi_u(t)\|^2_{E_b} \le Ce^{-\delta t}\left(\|\xi_u(0)\|^2_{E_b} + \|\xi_u(0)\|^{q+2}_{E_b}\right) + C_1(1 + \|g\|^2_{L^2_b}), \quad \delta > 0 \tag{8}$$

Таким образом, задача (1) порождает полугруппу

$$S_t : E_b \to E_b, \quad S_t \xi_u(0) = \xi_u(t), \tag{9}$$

где $\xi_u(t) = (u(t), \partial_t u(t))$ – решение уравнения (1). Более того, из оценки (8) следует, что полугруппа S_t обладает поглощающим множеством в пространстве E_b, поэтому для описания поведения решений задачи (1) при $t \to \infty$ естественно использовать понятие аттрактора полугруппы S_t, порождаемой этой задачей.

Определение 2 (см. [1]**).** *Множество* $\mathcal{A} \subset E_b$ *называется аттрактором полугруппы* (7) *(*(E_{loc}, E_b)*-аттрактором в обозначениях* [1]*), если выполнены следующие условия:*

1. Множество $\mathcal{A}$ *– компакт в пространстве Фреше* $E_{loc}(\mathbb{R}^n) \equiv W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

2. Множество $\mathcal{A}$ *строго инвариантно относительно полугруппы* S_t, *то есть*

$$S_t \mathcal{A} = \mathcal{A} \text{ при } t \ge 0$$

3. Множество $\mathcal{A}$ *притягивает ограниченные подмножества пространства* E_b, *то есть для любого ограниченного* $\mathcal{B} \subset E_b$ *и любой* E_{loc}*-окрестности* $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ *множества* $\mathcal{A}$ *существует* $T = T(\mathcal{O}, \mathcal{B})$, *такое что*

$$S_t \mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}) \text{ при } t \ge T$$

Отметим, что согласно определению топологии в пространстве E_{loc}, условие 1 определения 2 означает, что сужение $\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}$ множества $\mathcal{A}$ на любой шар $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ компактно в пространстве $E(B^R_{x_0}) \equiv W^{1,2}(B^R_{x_0}) \times L^2(B^R_{x_0})$.

Аналогично, условие 3 эквивалентно следующему: для любого шара $B^R_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$, любой окрестности $\mathcal{O}$ множества $\mathcal{A}\big|_{B^R_{x_0}}$ в пространстве $E(B^R_{x_0})$ и произвольного ограниченного множества $\mathcal{B} \subset E_b$ существует $T = T(B^R_{x_0}, \mathcal{B}, \mathcal{O})$, такое что

$$S_t \mathcal{B}\big|_{B^R_{x_0}} \subset \mathcal{O} \text{ при } t \ge T$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия Теоремы 1. Тогда полугруппа S_t, порожденная уравнением* (1), *обладает аттрактором $\mathcal{A}$ в смысле определения 2. Кроме того,*

$$\mathcal{A} = \{\xi(0) : \ \xi(t), \ t \in \mathbb{R}, \ -\textit{решение } (1) \textit{ и } \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t)\|_{E_b} < \infty\} \tag{10}$$

Замечание 1. *Как показывают элементарные примеры, аттрактор $\mathcal{A}$ задачи* (1) *не является, вообще говоря, компактным в равномерной топологии пространства E_b.*

Оставшаяся часть работы посвящена изучению аттрактора $\mathcal{A}$, построенного в теореме 2. Заметим, что в отличие от случая ограниченной области $x \in \Omega$ в неограниченных областях аттрактор $\mathcal{A}$ задачи (1) может иметь бесконечную хаусдорфову и фрактальную размерность, поэтому для его исследования используется понятие Колмогоровской ε–энтропии. Напомним (см., например, [4]), что Колмогоровской ε-энтропией компактного множества K в метрическом пространстве M называется следующая величина:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(K, M) \equiv \ln \mathcal{N}_\varepsilon(K) \tag{11}$$

где $\mathcal{N}_\varepsilon(K)$ – наименьшее число ε-шаров в M, которыми можно покрыть компакт K. Напомним также, что фрактальная (энтропийная) размерность множества $K \subset M$ вычисляется по формуле

$$\dim_F(K, M) \equiv \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(K, M)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \tag{12}$$

Оценки ε- энтропии аттракторов уравнений математической физики получены в [2] для случая неавтономных уравнений реакции-диффузии в ограниченной области; в [5] для комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау в $\mathbb{R}^n$, $n \le 3$; в [3] для автономных и неавтономных уравнений реакции-диффузии в неограниченных областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда энтропия сужения аттрактора $\mathcal{A}$ задачи* (1) *на шар $B^R_{x_0}$ допускает оценку*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathbb{A}\big|_{B^R_{x_0}}, E_b(B^R_{x_0})) \le C(R + K\ln\frac{1}{\varepsilon})^n \ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{13}$$

где C и K – некоторые константы, зависящие от конкретного вида уравнения (и не зависящие от R, x_0 и ε).

В качестве примера, для которого справедлива изложенная выше теория, рассмотрим уравнение

$$\partial_t^2 u + \gamma\partial_t u - \Delta_x u + u|u|^\sigma - au = 0, \quad a > 0, \quad 0 < \sigma < \frac{2}{n-2} \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, таким образом, обладает аттрактором в E_b.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A} \subset E_b$ – аттрактор уравнения* (14). *Тогда,*

1. $\mathcal{A}$ замкнут, но не компактен в E_b.

2. Колмогоровская ε- энтропия $\mathcal{A}$ допускает следующую оценку снизу:

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathbb{A}\big|_{B^R_{x_0}}, E_b(B^R_{x_0})) \geq C_1 R^n \ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{15}$$

и, таким образом, оценка (13) *является точной при $R \sim \ln\frac{1}{\varepsilon}$, или при $R >> \ln\frac{1}{\varepsilon}$.*

3. Для любого $\delta > 0$ существует $C_\delta > 0$, такое что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathbb{A}\big|_{B^1_{x_0}}, E(B^1_{x_0})) \geq C_\delta\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+1-\delta} \tag{16}$$

Следовательно, (13) *точна и при $R << \ln\frac{1}{\varepsilon}$*

Следствие 1. Сужение аттрактора $\mathcal{A}$ на любой шар $B^R_{x_0}$ имеет бесконечную фрактальную размерность.

Рассмотрим в заключении некоторый нетривиальный частный случай уравнения (1), в котором размерность аттрактора оказывается конечной.

Теорема 5. *Пусть в разложении* (2) $f_2 \equiv 0$, *выполнены условия* (3) *и* (5), *а правая часть $g \in L^2_b(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет условию*

$$\lim_{|x_0|\to\infty} \|g\|_{L^2(B^1_{x_0})} = 0 \tag{17}$$

Тогда аттрактор $\mathcal{A}$ является компактом в E_b, и его фрактальная размерность конечна:

$$\dim_F(\mathcal{A}, E_b) < \infty \tag{18}$$

Например, в случае $n = 2$ функция

$$f(u) = 2u^3 - 8u^2 + 9u \tag{19}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 5 и, следовательно, аттрактор $\mathcal{A}$ уравнения (1) с нелинейностью (19) и правой частью g, удовлетворяющей (17), имеет конечную фрактальную размерность.

Замечание 2. Отметим, что в условиях теоремы 5 аттрактор $\mathcal{A} = \{0\}$, если $g \equiv 0$. Однако в случае $g \neq 0$ аттрактор не является, вообще говоря, тривиальным. Более того, если функция f не монотонна, то есть существует $z \in \mathbb{R}$, такое что $f'(z) < 0$ (например, для функции (19) $z = 1$), то для любого $N \in \mathbb{N}$ существует правая часть g_N, удовлетворяющая (17), такая что

$$N < \dim_F(\mathcal{A}_{g_N}, E_b) < \infty$$

Литература

1. Бабин А.В., Вишик М.И., *Аттракторы эволюционных уравнений, М.: Наука* (1989).
2. М.И.Вишик и В.В.Чепыжов, *Колмогоровская ε-энтропия аттракторов систем реакции–диффузии*, Мат. Сборник **189(2)** (1998), 81–110.
3. Зелик С.В., *Аттрактор нелинейной системы уравнений реакции–диффузии в $\mathbb{R}^n$ и оценки его ε-энтропии.*, Матем. Заметки **65 (6)** (1999), 941–943.
4. А.Н.Колмогоров и В.М.Тихомиров, *ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах*, УМН **т. XIV, вып.2(86)** (1959), 3–86.
5. P.Collet and J.Eckmann, *Extensive properties of the complex Ginzburg–Landay equation.*, Commun. Math. Phys. **200** (1999), 699-722.
6. E.Feireisl, *Bounded, locally compact global attractors for semilinear damped wave equations on $\mathbb{R}^n$*, Diff. and Integral Eqn. **9** (1996), 1147–1156.
7. Ghidaglia J.-M., Temam R., *Attractors for damped non-linear hyperbolic equations,*, J. math. pures et appl. **66** (1987), 273–319.
8. J.Ginibre, A.Soffer, and G.Velo, *The global Cauchy problem for the critical nonlinear wave equation*, J. Funct. Anal. **110** (1992), 96–130.
9. Hale J.K., *Asymptotic behaviour of dissipative systems*, Math. Surveys and Mon., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).